EST. 2021
EMC
EDITORIAL MAR CARIBE

HANS FREUDENTHAL:

PERSPECTIVAS EN EDUCACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS Y ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

ADOLFO ANGULO ROMERO
FRANCISCO EDUARDO RENGIFO SILVA
ATANACIA SANTACRUZ ESPINOZA
JESÚS TTITO QUISPE
ALAN CHRISTIAN LÓPEZ CASTILLO
FAUSTO DAVID BERROCAL HUARCAYA

ISBN: 978-9915-9706-1-5
9 789915 970615

Hans Freudenthal: Perspectivas en educación de las matemáticas y análisis fenomenológico

Adolfo Angulo Romero, Francisco Eduardo Rengifo Silva, Atanacia Santacruz Espinoza, Jesús Ttito Quispe, Alan Christian López Castillo, Fausto David Berrocal Huarcaya

Primera edición: Agosto, 2024

Editado por:

Editorial Mar Caribe

www.editorialmarcaribe.es

Av. General Flores 547, Colonia, Colonia-Uruguay.

RUC: 15605646601

Diseño de cubierta: Yelitza Sánchez Cáceres

Libro electrónico disponible en https://editorialmarcaribe.es/hans-freudenthal-perspectivas-en-educacion-de-las-matematicas-y-analisis-fenomenologico/

Formato: electrónico

ISBN: 978-9915-9706-1-5

ARK: ark:/10951/isbn.9789915970615

Editorial Mar Caribe

Hans Freudenthal: Perspectivas en educación de las matemáticas y análisis fenomenológico

Colonia, Uruguay

2024

Sobre los autores y la publicación

Adolfo Angulo Romero
aangulor@unia.edu.pe
https://orcid.org/0000-0003-2128-843X
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Francisco Eduardo Rengifo Silva
francisco_rengifo@unu.edu.pe
https://orcid.org/ 0000-0001-5826-4058
Universidad Nacional de Ucayali, Perú

Atanacia Santacruz Espinoza
asantacruze@unia.edu.pe
https://orcid.org/0000-0002-3103-8947
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Jesús Ttito Quispe
jtitoq@unia.edu.pe
https://orcid.org/0000-0003-2981-8343
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Alan Christian López Castillo
alan_lopez@unu.edu.pe
https://orcid.org/0009-0003-7773-2031
Universidad Nacional de Ucayali, Perú

Fausto David Berrocal Huarcaya
fausto_berrocal@unu.edu.pe
https://orcid.org/0009-0000-1224-9741
Universidad Nacional de Ucayali, Perú

Libro resultado de investigación:
Publicación original e inédita, cuyo contenido es resultado de un proceso de investigación realizado antes de su publicación, ha sido revisada por pares externos a doble ciego, el libro ha sido seleccionado por su calidad científica y porque contribuye significativamente en el área del saber e ilustra una investigación completamente desarrollada y completada. Además, la publicación ha pasado por un proceso editorial que garantiza su estandarización bibliográfica y usabilidad.

Índice

Introducción

Para Freudenthal, la práctica de las matemáticas en el currículo no es un conjunto de teorías, objetivos y medios predeterminados. Por el contrario, siempre se asocia a procesos fenomenológicos entendidos positivamente en matemáticas, ya que el currículo muchas veces se utiliza en conjunto con la transformación o desarrollo de la práctica. Para Freudenthal (1968), la teoría de la educación era un esfuerzo práctico del que podían surgir nuevas ideas teóricas como una especie de subproducto científico. En su opinión, el desarrollo curricular no debería tener lugar desde la torre de marfil académica, sino en las escuelas, en colaboración con profesores y estudiantes. Expresó ideas similares y, al pedir un currículo práctico, cuestionó elocuentemente la teoría del currículo en la investigación y el desarrollo. e innovación.

Por tanto, existen similitudes entre algunas de las implicaciones de un enfoque colonial del currículo y el concepto mismo. Sin embargo, cuando la fenomenología aparece en la obra de Freudenthal, a menudo tiene el significado opuesto y, calificó la dirección principal del movimiento como teórica y de arriba hacia abajo, partiendo de una visión del currículum como procesos y proponiendo una alternativa propia para el desarrollo educativo, que no era más que una perspectiva de educación matemática, es decir, su matemática realista (Sepúlveda, 2018).

Desde esta perspectiva, las matemáticas reales fenomenológicas, curriculares y etnográficas, o la “matematización” basada en la práctica, tienen características similares. Y esto era de fundamental importancia para

Freudenthal, porque, en su opinión, la tarea principal de la educación matemática debería ser la matematización de la realidad cotidiana. No se puede aprender matemáticas en los cursos de matemáticas porque inicialmente ninguna de las matemáticas es empíricamente real para los estudiantes, sobre todo en los primeros años de vida, ósea en la educación inicial y primaria. Además, la asignatura de matemáticas, basada en hechos, ayuda a los estudiantes a adoptar un enfoque matemático en situaciones cotidianas (Trujillo, 2017). En este libro, podemos referirnos a la actividad matemática realista, plasmada por Freudenthal (1991), la cual implica una actitud matemática que incluye el conocimiento de las posibilidades y limitaciones del aprendizaje de un método matemático, es decir, el conocimiento de cuándo un método matemático es apropiado y cuándo es apropiado o no.

Este énfasis en la "matematización" es consistente con la necesidad de matemáticas para todos. Freudenthal destaca que no todos los estudiantes se convertirán en futuros matemáticos, pues para la mayoría, todo el conocimiento matemático que utilicen se utilizará para resolver problemas cotidianos, es decir en el contexto sociocultural que les rodea. Por lo tanto, introducir a los estudiantes en métodos matemáticos para resolver este tipo de problemas merece ser considerado una de las principales prioridades de la educación matemática, esta es su fenomenología.

La historia que desarrolló Freudenthal es quizás más conocida por su crítica de la investigación educativa tradicional que por sus propias ideas y teorías contraempíricas (Alsina, 2009). La oposición de Freudenthal a gran parte de la investigación educativa surgió de su creencia de que la desescolarización era necesaria, a opinión de los autores, un currículo basado en lo etnográfico y en las experiencias vividas. Estas pausas pueden verse como la creación de métodos o la adopción de perspectivas desde diferentes ángulos y, sostiene que a partir de esta brecha se puede saber si el estudiante ha alcanzado un cierto nivel de comprensión o no. Para identificar estas violaciones, los estudiantes deben ser observados individualmente. Esto significa que las medidas grupales y similares no son particularmente útiles porque llenan vacíos individuales. Además, el énfasis debería estar en observar el proceso de aprendizaje en lugar de examinar los resultados objetivos del aprendizaje.

Además, Freudenthal cree que una investigación tan exhaustiva no puede responder preguntas educativas sobre por qué y quién enseña una materia determinada. Freudenthal ofrece un segundo conjunto de críticas al movimiento de evaluación. En teoría, Freudenthal se basó en una educación formativa y no punitiva y se centraba en el desconocimiento de la materia y la sobrevaloración de la fiabilidad en detrimento de la validez.

Capítulo 1

Freudenthal y el análisis fenomenológico

Al comienzo de su obra, Freudenthal introduce el término "fenomenología" para describir su método de análisis de conceptos matemáticos. Explica que este término se deriva de la distinción que hace la tradición filosófica entre "fenómeno" y "noúmeno". En matemáticas, esta distinción se ve entre los conceptos o estructuras (noúmenos) y los fenómenos que organizan estos conceptos. Por ejemplo, las figuras geométricas organizan los fenómenos de los contornos.

El análisis fenomenológico de un concepto o estructura implica describir los fenómenos que organiza y examinar la relación entre el concepto o estructura y estos fenómenos. Este análisis debe considerar el desarrollo y uso actual de las matemáticas, así como el propósito original del concepto o estructura y sus extensiones posteriores (Puig, 1997). La relación entre fenómenos y conceptos se vuelve más compleja cuando se introducen los objetos mentales, y el análisis fenomenológico debe considerar también las relaciones entre fenómenos y objetos mentales, y entre objetos mentales y conceptos.

Para comprender mejor las ideas de Freudenthal, es necesario despojar a los términos de su bagaje filosófico. En lugar de utilizar "noúmeno", es más apropiado referirse al concepto como "medio de organización". Esto enfatiza la función de los conceptos en relación con los fenómenos. El término "fenómeno" todavía puede usarse para describir lo que experimentamos matemáticamente, pero su significado original de apariencia debe dejarse de lado. Es importante reconocer que los medios de organización de los fenómenos que utilizamos para comprender nuestra experiencia matemática también son un objeto de experiencia. El par de fenómenos y medios de organización se define por su relación más que por su pertenencia a mundos diferentes.

Esta comprensión nos permite ver la serie de fenómenos y medios de organización como interconectados, y los medios de organización de un par se convierten en los fenómenos del siguiente. Por tanto, dedicarse a la fenomenología es describir una de estas series o uno de sus pares (Chakravorty, 2010). Aunque los términos "fenómeno" y "noúmeno" se toman de la tradición filosófica, Freudenthal no proporciona una definición clara de estos términos. Afirma que no los utiliza en el sentido que les dan filósofos como Hegel, Husserl o Heidegger, pero no se alinea con ningún sistema filosófico específico. El 'noúmeno' se identifica como el "objeto del pensamiento" sin más explicaciones, y el 'fenómeno' se describe como algo de lo que tenemos experiencia. Estos términos tienen orígenes griegos, donde "noúmeno" significa "lo que se piensa mediante la razón" o "lo que es inteligible", y "fenómeno" significa "lo que aparece".

Los fenómenos son las apariencias o lo que percibimos de las cosas, mientras que los noúmenos se consideran la verdadera realidad en la tradición filosófica realista (Navarro, 1971). Identificar conceptos matemáticos con noúmenos los coloca fuera de nuestro ámbito de experiencia. Sin embargo, esto contradice una de las características de las matemáticas señaladas por Freudenthal: que los conceptos matemáticos son parte del campo de fenómenos que organizan. Los conceptos matemáticos no están separados de nuestra experiencia ni en un mundo diferente al de los fenómenos que organizan.

El análisis fenomenológico desarrollado por Freudenthal sirve al propósito de la didáctica, aunque se basa en conceptos de la filosofía y tiene implicaciones para la comprensión de las matemáticas. Freudenthal distingue varios tipos de fenomenología, todos los cuales son importantes para la didáctica, pero sólo uno está específicamente calificado como didáctico. Estos tipos incluyen la fenomenología, la fenomenología didáctica, la fenomenología genética y la fenomenología histórica.

Cada tipo de análisis se centra en diferentes fenómenos en relación con el concepto que se estudia. En fenomenología pura, la atención se centra en el estado actual y el uso de las matemáticas. En la fenomenología didáctica, la atención se centra en los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes y los introducidos en las secuencias de enseñanza. En fenomenología genética, la atención se centra en los fenómenos relacionados con el desarrollo cognitivo de los estudiantes. En la fenomenología histórica, la atención se centra en los fenómenos que llevaron a la creación y extensión del concepto en cuestión.

La descripción de las relaciones entre los fenómenos y el concepto varía según el tipo de análisis fenomenológico. En la fenomenología pura, los conceptos matemáticos se tratan como productos cognitivos, mientras que en la fenomenología didáctica se tratan como procesos cognitivos dentro del sistema educativo (Zolkower y Bressan, 2012). Freudenthal enfatiza que una fenomenología didáctica no debe necesariamente basarse en una fenomenología genética. El orden correcto para realizar diferentes tipos de análisis fenomenológico comienza con la fenomenología pura, seguida de la fenomenología histórica, luego la fenomenología didáctica y finalmente la fenomenología genética. Es esencial que cualquier análisis fenomenológico eficaz en la enseñanza esté respaldado por un análisis sólido de la fenomenología pura.

La naturaleza de las matemáticas

Los conceptos matemáticos son medios para organizar los fenómenos del mundo. Sin embargo, esta caracterización carece de especificidad a menos que definamos lo que entendemos por "el mundo" e identifiquemos los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos. La fenomenología, como método, tiene como objetivo investigar los fenómenos organizados por conceptos matemáticos a través del análisis, en lugar de asumir un conocimiento previo de estos fenómenos.

Por tanto, no es posible predeterminar el tipo de fenómenos organizados por las matemáticas sin realizar análisis específicos. El análisis fenomenológico de Freudenthal sirve de fundamento para la organización de la enseñanza de las matemáticas, pero no profundiza en explicar la naturaleza de las matemáticas en sí. Se podría utilizar este análisis sin comprometerse con ninguna postura epistemológica u ontológica particular hacia las matemáticas. En otras palabras, se podrían ver los conceptos matemáticos como herramientas para organizar los fenómenos en la enseñanza, sin creer necesariamente que esta organización refleje la verdadera naturaleza de las cosas. Sin embargo, es importante señalar que las creencias de estudiantes y profesores sobre la naturaleza de las matemáticas influyen en gran medida en cómo perciben las actividades matemáticas en el aula y el conocimiento que pretenden transmitir.

Por otro lado, se podría interpretar de la afirmación anterior que las matemáticas existen en un mundo separado del que organiza, es decir, el mundo real que nos rodea. Sin embargo, no encuentro que esta interpretación sea la más adecuada. De hecho, si consideramos el origen o el nivel más bajo, los fenómenos organizados por conceptos matemáticos son los del mundo real, físico y cotidiano. Nuestras experiencias con este mundo físico involucran objetos, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones. Por tanto, los fenómenos organizados por las matemáticas son los objetos, propiedades, acciones y propiedades de las acciones en el mundo, vistos como medios de organización y considerados en relación con ellos.

Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos del mundo que abarcan los productos cognitivos humanos, incluidos los productos de la actividad matemática (Vergnaud, 1988). Estos fenómenos incluyen los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones, en su relación con los medios de organización. La progresión gradual de los fenómenos y los medios de organización implica dos procesos: la creación de conceptos matemáticos como medios de organización y la objetivación de los medios de organización, permitiéndoles formar parte de nuevos pares en la posición de los fenómenos. Esta progresión gradual ilustra la producción de objetos matemáticos cada vez más abstractos y de mayor nivel, lo que demuestra que la actividad matemática genera su propio contenido.

La primera interpretación aclara que los conceptos matemáticos no existen en un mundo ideal que estudiamos ni tienen una existencia preexistente antes de la actividad matemática. La actividad matemática no consiste en descubrir la geografía de un mundo donde residen objetos. Sin embargo, también es importante señalar que el análisis de Freudenthal no describe simplemente la actividad matemática como un juego entre los fenómenos mundiales y los medios matemáticos de organización. Más bien, Freudenthal reconoce que los propios medios de organización se convierten en objetos situados en un campo de fenómenos.

En consecuencia, los objetos matemáticos pasan a formar parte de nuestro mundo experiencial, entrando como fenómenos en una nueva relación con otros fenómenos y medios de organización. Este proceso de incorporación de objetos matemáticos a nuestro mundo conduce a la creación de nuevos conceptos matemáticos, y este ciclo continúa repetidamente. Por tanto, las matemáticas existen dentro del mismo mundo que los fenómenos que organiza, y no hay un mundo separado sino un mundo único que se expande con cada producto matemático. Se mencionó anteriormente que la razón por la que los conceptos matemáticos no existen como objetos ideales en un mundo separado se debe en gran medida al papel de los sistemas de signos en los que se expresan o escriben las matemáticas.

Los signos

Los textos matemáticos, independientemente de la experiencia del lector, suelen contener símbolos y términos que no se utilizan habitualmente en el lenguaje cotidiano. Esta distinción ha llevado a la noción de que el lenguaje de las matemáticas está separado del vernáculo. Además, a lo largo de la historia de las matemáticas, ha habido casos en los que se desarrollaron nuevos conceptos e ideas, lo que resalta aún más la naturaleza única del discurso matemático.

El lenguaje de las matemáticas desempeña un papel crucial y a menudo se considera separado del lenguaje cotidiano. Algunos matemáticos creen que las verdaderas matemáticas sólo están escritas en un lenguaje completamente formalizado, mientras que se considera que los textos matemáticos cotidianos contienen "abusos del lenguaje" debido al uso de la lengua vernácula. Sin embargo, en lugar de centrarse en los tipos de signos utilizados en matemáticas, es más importante estudiar los procesos de significado y la producción de significado. Por tanto, no es necesario separar los signos matemáticos de la lengua vernácula u otros medios de representación.

En cambio, todos los signos utilizados en la actividad matemática pueden considerarse parte de un sistema matemático de signos. Estos signos no son homogéneos y pueden describirse utilizando una terminología tomada de la semiótica, que se centra en la expresión y el contenido de un signo. Los sistemas matemáticos de signos contienen signos con diferentes expresiones, similares a otras actividades humanas como el cine o el canto.

Los conceptos matemáticos se crean a través de la relación entre los fenómenos y los medios de organización descritos por los sistemas matemáticos de signos. Estos objetos matemáticos tienen una existencia material que les otorgan los sistemas de signos que los describen y los crean. A medida que los medios de organización se vuelven más abstractos, los sistemas matemáticos de signos también se vuelven más abstractos y crean conceptos abstractos correspondientes (Streefland, 1991).

En la discusión anterior, se ha resaltado los elementos cruciales de un marco matemático que incorpora los principios derivados de la fenomenología de las matemáticas de Freudenthal y el concepto de sistemas matemáticos de signos de Filloy. Sin embargo, es importante reconocer que esta descripción todavía carece de complejidad. Para proporcionar una comprensión más completa, ahora introduciré ideas adicionales que creo que son esenciales para una descripción completa. Estas ideas se derivan de los trabajos de Lakatos y Kitcher, y aunque no profundizaré aquí en sus complejidades, animo a los lectores a consultar los textos correspondientes en la bibliografía para una exploración más profunda.

En el ámbito de la actividad matemática, los objetos de la experiencia se componen de objetos del mundo, propiedades de los objetos, acciones realizadas sobre esos objetos y propiedades de esas acciones. Keitel (1987) introduce la noción de que las acciones mencionadas no son necesariamente acciones que realmente realizamos o somos capaces de realizar, sino que son acciones que pueden ser realizadas por un sujeto ideal dotado de mayores poderes de acción que los nuestros.

Por ejemplo, este sujeto ideal podría repasar la secuencia de números naturales o utilizar la función de elección de Hilbert. Si bien esta idea puede sugerir que las matemáticas pueden desarrollarse sobre la base de estipulaciones arbitrarias de estos poderes, generando así conceptos matemáticos que carecen de cualquier propósito epistémico o práctico, este peligro se evita en la práctica a través de varios medios.

Si bien los conceptos matemáticos se crean en el proceso de organización de los fenómenos, no son inmutables una vez creados. Más bien, están sujetos a modificaciones con el tiempo debido a su uso y a los nuevos sistemas matemáticos de signos en los que se describen. Sin embargo, estas modificaciones no deben verse como indicativas de errores en los conceptos originales o como una progresión lineal hacia una verdad singular. Esto se debe a que rechazamos la noción de que los objetos matemáticos tengan una existencia anterior al proceso que los crea.

Para Beltrán (1996), Lakatos presenta una perspectiva diferente sobre la evolución de los conceptos en la historia, quien examina cómo los conceptos evolucionan bajo la presión de demostrar los teoremas en los que están involucrados. Lakatos destaca cómo el establecimiento de la conjetura C + V = A + 2 para cualquier poliedro y su demostración por parte de Euler condujo al surgimiento de ejemplos de sólidos que no se alineaban con la demostración o, más significativamente, con el concepto mismo.

Una forma de abordar este peligro es mediante el papel de los sistemas matemáticos de signos en la creación de conceptos matemáticos. Estos sistemas no sólo nos permiten organizar fenómenos creando conceptos relevantes, sino que también nos permiten realizar nuevas acciones sobre objetos matemáticos o apreciar la posibilidad de hacerlo si se eliminaran ciertas limitaciones. Estas nuevas acciones no son arbitrarias, sino que son sugeridas por los sistemas matemáticos de signos más abstractos, extendiendo así acciones que previamente nos habíamos visto capaces de realizar o que habíamos establecido como factibles en un nivel inferior. Además, la aceptación de estas nuevas acciones por parte de la comunidad matemática sirve como mecanismo regulador. Sin embargo, esta aceptación no está exenta de controversia, como se ve en el caso de la función de elección de Hilbert.

Según un concepto de objetos matemáticos, existe un objeto ideal conocido como poliedro, y el propósito de la actividad matemática es descubrir sus propiedades. Este teorema proporciona evidencia de que los sólidos en cuestión no son verdaderos poliedros o, alternativamente, la demostración de sus propiedades es defectuosa. Sin embargo, es importante señalar que la interpretación de la historia de Lakatos difiere de este teorema. Lakatos distingue entre dos tipos de contraejemplos: contraejemplos locales y globales.

Un contraejemplo local se refiere a un sólido que posee características que hacen que la prueba sea inaplicable, pero aun así cumple la relación en cuestión. Estos contraejemplos no refutan la conjetura; más bien, indican que la prueba se basa en una propiedad que se suponía válida para todos los poliedros, pero esta suposición es incorrecta. Por lo tanto, lo que se rebate es un eslogan que ha sido utilizado implícitamente, invalidando en consecuencia la prueba. La existencia de estos contraejemplos introduce una discrepancia en los conceptos que no estaba presente anteriormente.

El impacto del surgimiento de contraejemplos globales tiene una importancia significativa para nuestro análisis. Cuando un contraejemplo refuta una conjetura a escala global, resulta particularmente digno de mención. Lakatos presenta por primera vez contraejemplos globales al teorema de Euler, que incluyen un sólido formado por un cubo con un agujero cúbico en su interior y un sólido formado por dos tetraedros unidos por una arista o un vértice. Posteriormente, introduce un caso aún más intrigante de estrella sólida, la verificación o negación de la relación dependiendo de si sus caras son consideradas polígonos estelares o no.

La existencia de estos contraejemplos crea tensión entre el concepto, el teorema y su demostración. Varios enfoques pueden resolver esta tensión e impactar el concepto de poliedro. Los enfoques más fundamentales incluyen: 1) Exclusión de monstruos. Los contraejemplos presentados se consideran ejemplos no convencionales de poliedros, denominados monstruos. Si bien su existencia es posible, no es deseada. La posibilidad de su existencia está determinada por la definición de poliedro que se utiliza, lo que lleva al desarrollo de una nueva definición que los excluye explícitamente para mantener el teorema. 2) Exclusión de excepciones. Los contraejemplos presentados se consideran ejemplos válidos del concepto, aunque no se anticipó su existencia cuando se planteó originalmente la conjetura. Para volver a un terreno más seguro, la conjetura se modifica introduciendo una distinción dentro del concepto que separa estos ejemplos. 3) Ajuste de monstruos. Los objetos son examinados desde una perspectiva diferente, haciendo que dejen de ser contraejemplos. Esto se ejemplifica con las dos formas diferentes de percibir los poliedros estelares: compuestos de polígonos estelares o no.

Polígono regular: Para cualquier isometría S, un punto no invariante A0 exhibe una órbita, que comprende el conjunto de puntos An en los que A0 se transforma mediante las potencias Sn, donde n abarca todos los números enteros. En consecuencia, podemos describir el polígono A0A1A2... generado de esta manera como regular. Dado que los valores posibles de n abarcan números enteros negativos, la secuencia de puntos se extiende tanto hacia adelante como hacia atrás, y el polígono A0A1A2... debería describirse con mayor precisión como: ...A-2A-1A0A1A2... Este ejemplo es particularmente digno de mención porque cada una de las definiciones de polígono y poliedro incorpora enfoques distintos para abordar la tensión que estamos examinando.

Es evidente que la definición de polígono se desarrolla aceptando nuevos objetos, ampliando explícitamente el contenido del concepto (lo que posteriormente requerirá una mayor clasificación en varios tipos de polígonos). Poliedro: Un poliedro es una colección finita de polígonos planos, conocidos como caras, junto con todas sus aristas y vértices, que satisfacen las tres condiciones siguientes: i) Cada arista pertenece exactamente a dos caras, y estas caras no están en el mismo plano. ii) Las caras que comparten un vértice forman un único ciclo, es decir, su intersección por una esfera suficientemente pequeña, centrada en el vértice común, constituye un único polígono esférico. iii) Ningún subconjunto propio de las caras cumple la condición i).

Poliedro regular: Para cualquier poliedro, definimos una bandera (A, AB, ABC...) como la configuración geométrica compuesta por un vértice A, una arista AB que contiene ese vértice, y una cara ABC... que contiene esa arista. Un poliedro se considera regular si su grupo de simetría presenta transitividad dentro de sus banderas. A pesar de la simplicidad de estos métodos básicos para abordar la tensión, es evidente que el concepto de poliedro se ve significativamente afectado en todos los casos.

Ya sea que se reconozcan o excluyan los contraejemplos como ejemplos del concepto, el campo semántico se amplía. En un escenario, el contenido de la expresión aumenta, ampliando efectivamente la gama de fenómenos que el concepto inicialmente pretendía abarcar; esta expansión constituye el campo semántico. En el otro escenario, el concepto establece conexiones con nuevos objetos que antes estaban distanciados de él en la nueva definición, convirtiéndose así en parte integral de su contenido. Todo el proceso es más complejo e implica sistemas matemáticos de símbolos cada vez más intrincados o abstractos en los que se traducen los conceptos, originalmente expresados en sistemas matemáticos más simples o menos abstractos.

Como afirma Lakatos, los conceptos generados a través de este proceso no mejoran los conceptos originales; no son especificaciones ni generalizaciones de los mismos. En cambio, transforman los conceptos originales en algo completamente distinto: crean nuevos conceptos. Esto es precisamente lo que pretendo enfatizar: el resultado del proceso de tensión entre conceptos, teoremas y demostraciones de Lakatos no es la delineación del verdadero concepto de poliedro que corresponde a un objeto ideal preexistente, sino la creación de nuevos conceptos.

En la definición de poliedro, cada condición tiene el propósito de excluir ciertos objetos. Por ejemplo, la condición i) impide la inclusión de un sólido formado por dos tetraedros unidos por una arista a modo de poliedro, excluyendo así a los monstruos de la categoría. Sin embargo, esta misma condición también prohíbe la interpretación de un poliedro estrella cuyas caras no sean los correspondientes polígonos estrella, ya que daría como resultado caras que se encuentran en el mismo plano.

Por lo tanto, esta condición no permite el ajuste de ese tipo particular de monstruo, y los poliedros estelares sólo se consideran poliedros cuando sus caras son los polígonos estelares correspondientes. La ampliación del concepto de poliedro radica en las relaciones que establece cada condición con otros objetos matemáticos, así como su representación dentro del sistema de signos utilizado.

La idea de Lakatos sugiere que los conceptos matemáticos no están fijos en su forma original. Sufren cambios, impulsados por las tensiones que surgen de estar involucrados en probar y refutar. Sin embargo, la actividad matemática va más allá de la simple demostración de teoremas. La resolución de problemas es un factor clave en el desarrollo de las matemáticas, que incluye la demostración de teoremas y otras actividades.

La resolución de problemas abarca la demostración de teoremas de dos maneras:

- En primer lugar, abarca la demostración de teoremas a escala global, donde todos los problemas se consideran como problemas y se hace la distinción entre encontrar y demostrar problemas.
- En segundo lugar, la resolución de problemas incluye la demostración de teoremas en el contexto de cada problema particular.

De hecho, lo que caracteriza la resolución de problemas en matemáticas es que el resultado obtenido debe ir acompañado de una justificación que verifique las condiciones del problema. Esto amplía el ámbito en el que los conceptos se ven influenciados y modificados más allá de la mera demostración de teoremas, para incluir la resolución de problemas. Además, la formulación de nuevos problemas y el estudio de familias de problemas también son aspectos importantes de la resolución de problemas que contribuyen a la creación de conceptos matemáticos.

La resolución de problemas no es la única actividad matemática que genera conceptos. La organización de los resultados obtenidos mediante la resolución de problemas y la demostración de teoremas en un sistema deductivo es otro aspecto crucial de las matemáticas. Esta organización sistemática puede adoptar diversas formas, desde lo local hasta lo global y desde lo axiomático hasta lo formalizado. Sin embargo, es un componente fundamental de las matemáticas, ya que los matemáticos han pasado de acumular resultados y técnicas a desarrollar marcos integrales. En este proceso también ha evolucionado el uso de definiciones en matemáticas. En matemáticas, las definiciones sirven no sólo para explicar el significado de los términos a las personas, sino también como eslabones en cadenas deductivas dentro de las actividades de organización de sistemas deductivos.

El proceso de definición implica organizar las propiedades de un objeto matemático mediante deducción. Se centra en identificar las propiedades que pueden utilizarse para formar un sistema deductivo, ya sea a escala local o global, en el que se puede incluir el objeto matemático. Es importante señalar que resaltar propiedades específicas para definir un concepto no es un acto neutral o inocente. Por un lado, sugiere que el concepto fue creado originalmente para organizar los fenómenos correspondientes. Por otro lado, significa que el contenido del concepto ahora está determinado por las deducciones realizadas dentro del sistema definido. De manera similar a la demostración de teoremas, el proceso de definición también conduce a la creación de nuevos conceptos.

Los objetos y la adquisición de conceptos

En esta sección, se presentará una nueva idea propuesta por Freudenthal que desafía las ideas que he presentado hasta ahora. Esta idea gira en torno a la distinción entre un objeto mental y un concepto. Encuentro este concepto particularmente importante porque lleva a Freudenthal a adoptar una postura didáctica: el objetivo principal de la educación debe ser el desarrollo de objetos mentales, siendo la adquisición de conceptos de importancia secundaria. La posición es especialmente significativa en el contexto de la escolarización obligatoria, ya que plantea interrogantes sobre lo que las matemáticas pueden ofrecer a la población en general. Sin embargo, también tiene relevancia para el análisis fenomenológico de conceptos matemáticos, particularmente en el marco de la fenomenología didáctica (Treffers, 1987).

Es crucial recordar que este análisis precede a la organización de la enseñanza y se realiza con ese objetivo en mente. En esencia, la distinción objeto mental/concepto que presenta Freudenthal puede entenderse como el resultado de considerar a los individuos que conciben o utilizan las matemáticas en contraste con las matemáticas como una disciplina o un cuerpo de conocimiento histórica, social o culturalmente establecido. En las secciones anteriores, nos hemos centrado principalmente en conceptos matemáticos dentro de la disciplina misma, con una consideración limitada de individuos específicos. Y, se han analizado varios conceptos matemáticos y su relación con los fenómenos y los medios de organización. También se ha hecho referencia a la objetivación de estos medios de organización y cómo se integran en una relación de nivel superior entre fenómenos. Además, se ha explorado cómo los conceptos sufren transformaciones como resultado de actividades matemáticas como la demostración de teoremas, la resolución de problemas, la organización en un sistema deductivo y el proceso de definición. A lo largo de todo esto he enfatizado que los conceptos matemáticos no existen independientemente de la actividad matemática que les da origen.

Por ejemplo, consideremos el concepto de perro. El objeto mental asociado con este concepto no es capaz de ladrar, ya que es simplemente una representación del concepto en la mente. En la era de las "matemáticas modernas", se intentó enseñar a los estudiantes el concepto de números a través de la construcción cantoriana de los cardinales. Aunque, si estos estudiantes hubieran confiado únicamente en el plan de estudios oficial, habrían abandonado la escuela sin adquirir una verdadera comprensión de los números. En cambio, necesitaban desarrollar un objeto mental de números fuera de lo que los programas educativos pretendían enseñarles.

La transcripción presentada trataba sobre un individuo excepcional que posee habilidades superiores y realiza acciones que superan nuestras propias capacidades. Para comprender este concepto, necesitamos explorar el contraste entre los objetos mentales y los conceptos matemáticos. En el lenguaje cotidiano, normalmente nos referimos a la comprensión que una persona tiene de un concepto como su "concepto", o podemos usar el término "concepción" para enfatizar que es su interpretación personal del concepto. Sin embargo, a los efectos de esta discusión, usaremos el término "objeto mental" para resaltar que es una parte o perspectiva del concepto que existe dentro de la mente del individuo.

Así, los objetos y conceptos mentales pueden diferir en sus interpretaciones y aplicaciones. Al explorar los diversos contextos en los que se utilizan los números, podemos obtener una comprensión más profunda de los significados que tienen en diferentes situaciones. Para ilustrar la diferencia entre objetos y conceptos mentales, utilizaré como ejemplo el concepto complejo y multifacético de números. En lugar de seguir el enfoque de Freudenthal, lo describiremos en términos semióticos. Los números no sólo se utilizan en actividades matemáticas o en el aula; también se emplean en diversos contextos cotidianos. Estos contextos pueden incluir secuencias, conteo, cardinales, ordinales, medidas, etiquetas, dígitos escritos, magia y cálculos. Aunque no profundizaré en los detalles de cada contexto, quiero enfatizar que existen características y significados distintos asociados con los números en cada situación.

El campo semántico de "número" abarca todos los usos de los números en diversos contextos, definiendo su significado enciclopédico. Comprender el contexto específico en el que se utiliza un número permite al lector o receptor de un mensaje interpretarlo correctamente. Sin embargo, los individuos no tienen acceso a toda la gama de usos de los números en una cultura o episteme. Más bien, operan dentro de su propio campo semántico personal, que evoluciona y produce significado en situaciones que requieren nuevos usos de los números.

Este campo semántico personal se alinea con lo que Freudenthal denomina "número de objeto mental". Freudenthal sugiere que los sistemas educativos deberían apuntar a desarrollar los campos semánticos personales de los estudiantes para abarcar una amplia gama de usos de los números, asegurando que puedan interpretar correctamente cualquier situación que involucre números. Los usos mundanos de los números ocurren en diversos contextos donde los fenómenos se organizan utilizando el concepto de número, tanto en su forma original como en sus aplicaciones extendidas.

El concepto de objetos mentales ayuda a organizar estos fenómenos, permitiendo a los individuos participar en actividades como la numeración. Los objetos mentales se forman a través de cadenas de fenómenos y medios de organización, similares a los conceptos. Si bien los contextos mundanos de uso de números mencionados anteriormente representan niveles más bajos, la riqueza fenomenológica de los números en la escuela secundaria requiere la consideración de contextos adicionales, incluidos los matematizados. Esta explicación proporciona una comprensión inicial de qué es un objeto mental y cómo se forma. Sin embargo, el término de Freudenthal podría haberse llamado simplemente de otra manera.

Es preciso enfatizar que ésta no es la única diferencia entre objetos mentales y conceptos, y no quiero sugerir que la relación entre ellos sea simplemente una cuestión de relacionar una parte del contenido del objeto mental con su totalidad. Sin embargo, antes de profundizar en otros aspectos de esta relación, es importante señalar que esta explicación sirve como base para la postura de Freudenthal, que mencioné anteriormente en esta sección. Según Freudenthal, la adquisición de conceptos es un objetivo educativo secundario que puede posponerse hasta que se haya establecido un objeto mental sólido.

La relación entre los objetos mentales y los conceptos es más compleja que el ejemplo del número que acabo de proporcionar, ya que mi explicación se ha centrado únicamente en comparar la expansión del campo semántico del número y la definición de Peano, descuidando siglos de historia que han dado forma a ambos contextos en qué número se utiliza, cuáles conservan huellas de su organización mediante conceptos de número y la definición de Peano. El concepto de número es un tema que requiere mayor aclaración. Para introducir un término que lo distinga, es importante explicar qué otros significados tiene el término "concepto" y en qué se diferencia de lo que hemos denominado "objeto mental".

Ya hemos establecido que los objetos mentales existen en la mente de las personas, mientras que los conceptos existen en el ámbito de las matemáticas. Sin embargo, esta distinción por sí sola no sería suficiente si creyéramos que los objetos mentales son simplemente reflejos de conceptos en la mente de las personas. La relación entre los objetos mentales y los conceptos tiene más matices que eso. Déjame explicarlo en términos de semiótica. Se ha equiparado el objeto mental del número con el campo semántico personal, que está formado por los diversos usos de los números en diferentes contextos y los significados culturalmente establecidos asociados con ellos.

Los conceptos matemáticos de números naturales, como los desarrollados por Peano, Cantor o Benacerraf, por ejemplo, son el resultado de un largo proceso histórico. En las secciones anteriores, he examinado la creación y modificación de estos conceptos. Desde la perspectiva semiótica que estoy empleando aquí, cualquier concepto matemático de número que deseemos examinar aparece como resultado de un proceso definitorio que lo incorpora a un sistema deductivamente organizado, extrayéndolo esencialmente del campo semántico más amplio.

Por ejemplo, el concepto de números naturales de Peano, particularmente en sus versiones más modernas, descompone el significado del contexto de secuencia y lo presenta como una serie de axiomas que describen de manera integral sus componentes. Por otro lado, el concepto de número natural derivado de la construcción de Cantor está vinculado al contexto cardinal, como lo indica el nombre que Cantor le dio originalmente. En esta explicación, los conceptos están directamente relacionados con una porción del objeto mental, ya que el proceso de definirlos implica seleccionar aspectos específicos del significado que abarca el objeto mental.

Al considerar los procesos involucrados en la creación y modificación de conceptos en la historia, es importante comprender la relación entre el objeto mental formado a partir de estos contextos y el concepto de número definido por Peano. Esta relación va más allá de una simple dinámica parte/todo. Un objeto mental bien constituido es aquel que puede dar cuenta de todos los usos y fenómenos en diversos contextos.

El objetivo de los sistemas educativos, como lo describió Freudenthal, es establecer estos buenos objetos mentales. Para comprender plenamente un concepto, es necesario examinar cómo se ha desarrollado en matemáticas y cómo se ha organizado dentro de un sistema deductivo. La relación específica entre un concepto matemático y su correspondiente objeto mental influye en cómo se constituye el objeto mental en relación con la adquisición del concepto. Los constituyentes de un buen objeto mental se determinan mediante el análisis fenomenológico del concepto en cuestión.

El análisis que nos ha llevado a diferenciar entre objetos mentales y conceptos es un análisis didáctico, centrado en examinar las matemáticas y sus estructuras en el contexto de la educación. Reconocemos que los estudiantes desarrollan objetos mentales, que son su propia comprensión y organización personal del conocimiento, y también reconocemos el contenido social y culturalmente establecido que queremos que los estudiantes aprendan, a los que nos referimos como conceptos.

Nuestra exploración del contraste entre objetos y conceptos mentales se realiza específicamente dentro del sistema educativo. En el contexto de la historia, los conceptos matemáticos no son algo que exista antes de nuestras experiencias, sino que se crean a través de la actividad matemática de los matemáticos. En este sentido, los conceptos matemáticos son simplemente cristalizaciones de objetos mentales. Incluso es posible, como sugiere Freudenthal, que los matemáticos trabajen con un objeto mental durante mucho tiempo antes de formalizarlo en un concepto, como fue el caso con el concepto de continuidad.

Entonces, ¿qué significa "convertir un objeto mental en un concepto" en este contexto? Ahora abordo la distinción entre objetos mentales y conceptos de manera diferente que cuando la examiné inicialmente. He asociado objetos mentales con individuos porque se forman a través de experiencias personales y sirven como una manera para que los individuos den sentido a sus experiencias y tengan control sobre ellas.

Por otro lado, los conceptos están asociados a las matemáticas como disciplina, pero también sirven como herramientas para organizar fenómenos. En el sistema escolar, los conceptos se presentan a los estudiantes antes de que tengan experiencias directas con los fenómenos correspondientes. El objetivo del sistema es que los estudiantes desarrollen objetos mentales que se alineen con los conceptos establecidos y tengan acceso a los valiosos medios de organización de los fenómenos que la historia nos ha proporcionado.

El tema que nos ocupa es el sistema escolar y su papel en la creación de nuevos conceptos matemáticos. Esta discusión se centra en el análisis de los objetos mentales utilizados por los matemáticos para organizar fenómenos y definirlos conceptualmente dentro del ámbito de las matemáticas. Es a través de la actividad matemática que los conceptos se derivan de estos objetos mentales.

Esta idea también se refleja en el trabajo de Lakatos, "Pruebas y Refutaciones", donde menciona que se supone que se entiende el concepto de poliedro, a pesar de no estar definido explícitamente. A medida que los matemáticos prueban teoremas y exploran diferentes formas de modificar conceptos, encuentran contraejemplos que desafían y dan forma a sus objetos mentales, lo que en última instancia conduce a la creación de nuevos conceptos.

Es común que surjan discrepancias entre el objeto mental y el concepto que de él se deriva. En tales casos, uno puede darse cuenta de que su objeto mental no estaba tan bien formado como se creía inicialmente, lo que lo impulsó a modificar o revisar la definición conceptual. Por ejemplo, Freudenthal destaca el concepto de continuidad como un caso en el que se produce un desajuste entre el objeto mental y el concepto creado.

Cuando se introdujo la primera definición explícita de continuidad, surgieron numerosos ejemplos de funciones continuas que antes no habían sido consideradas como tales. Sin embargo, con el tiempo, las sucesivas generaciones de matemáticos se acostumbran a estos casos nuevos y poco convencionales de continuidad. Remodelan su objeto mental primitivo para alinearlo con el concepto definido por las nuevas funciones. Es importante señalar que el objeto mental primitivo sigue siendo esencial para el avance de las matemáticas y no es simplemente reemplazado por el concepto. En cambio, se forma un nuevo objeto mental que abarca el concepto creado por la definición, o al menos es compatible con él de forma provisional.

La relación entre los objetos mentales y los conceptos puede variar mucho. Los objetos mentales se utilizan para organizar fenómenos y preceder a los conceptos. Sin embargo, los conceptos no reemplazan a los objetos mentales sino que contribuyen a la creación de nuevos objetos mentales que los incluyan o sean compatibles con ellos. A veces, existe una brecha significativa entre un objeto mental y un concepto, como ocurre con la curva del objeto mental y el concepto de curva de Jordan. En el campo de la topología, los objetos mentales por sí solos no proporcionan una comprensión profunda y es necesario formar conceptos que impliquen algo más que la simple organización local. Estos conceptos entran en un campo de estudio más amplio.

Los fenómenos pueden organizarse en un nivel superior mediante objetos mentales como espacios y variedades de dimensión arbitraria. Estos objetos mentales luego se transforman en conceptos mediante nuevos procesos organizativos y la creación de sistemas de signos más abstractos para describirlos. Este proceso de transformación es evidente al considerar la idea de objeto mental y el ascenso progresivo a través de la cadena de pares fenómeno/medio de organización. Sin embargo, es importante señalar que no todos los dominios de las matemáticas requieren conceptos para progresar.

La geometría elemental, por ejemplo, se puede organizar utilizando únicamente objetos mentales, sin necesidad de conceptos. En este caso, los conceptos pueden formarse a través de organizaciones locales, donde se resuelven las distancias entre los objetos mentales y los conceptos. Por ejemplo, un rectángulo puede entenderse como un objeto mental sin el concepto de "cuadrado", pero una organización local puede introducir el concepto de cuadrado sin conflicto. Sin embargo, también hay ejemplos en geometría donde la distancia entre el objeto mental y el concepto es evidente.

Este es el caso de conceptos elementales como punto, línea y superficie, que se parecen mucho a los objetos del mundo físico. Los objetos físicos, como motas o marcas hechas con un objeto punzante, sugieren objetos mentales que deben delinearse y convertirse en conceptos. Este proceso es evidente en las definiciones de punto, línea y superficie de Euclides, donde los objetos mentales se transforman en conceptos. Vale la pena señalar que el camino del desarrollo cognitivo no necesariamente va de una dimensión a tres, sino más bien todo lo contrario.

Las superficies se experimentan antes que las líneas, y los objetos mentales asociados con las líneas se constituyen a través de diversas fuentes fenomenológicas, como bordes de superficies, flechas, hilos, caminos y cortes. La diferencia entre las fuentes fenomenológicas y las definiciones euclidianas pone de relieve la distancia entre los objetos mentales y los conceptos. Esta distancia se vuelve aún mayor cuando se considera el objeto mental involucrado en la transición de una dimensión a otra, específicamente en la dimensión misma. La transformación de dimensión en concepto se logra en la topología, donde existe una distancia significativa entre el objeto mental y el concepto.

Sin embargo, también hay un nuevo tipo de propiedad que surge cuando las propiedades evidentes en el objeto mental son difíciles de probar, como el producto cartesiano n-dimensional de n segmentos. Esto crea una brecha significativa entre el objeto mental y el concepto de dimensión. La brecha se vuelve aún más pronunciada cuando se introducen dimensiones fraccionarias, lo que nos obliga a discutir las dimensiones en un sentido no tradicional.

Al analizar la fenomenología didáctica, es crucial considerar la fenomenología pura, reconociendo que hay casos donde la distancia entre el objeto mental y el concepto es insuperable. Esto es especialmente cierto en la enseñanza de la escuela secundaria. Comprender la formación de objetos mentales a través de la enseñanza implica reconocer las diversas formas que puede adoptar esta distancia.

Junto a los ejemplos mencionados, es importante señalar que hay casos en los que ciertos componentes son esenciales para el concepto pero no relevantes para la constitución del objeto mental. Por ejemplo, la comparación de conjuntos sin estructura es crucial para el concepto de números cardinales, pero juega un papel mínimo en la formación del objeto mental porque las situaciones de la vida real rara vez involucran conjuntos sin estructura. Asimismo, la estructura es realmente necesaria para hacer comparaciones en lugar de ser eliminada. Además, la fenomenología didáctica revela que los fenómenos organizados por un concepto pueden ser tan diversos que constituyen objetos mentales diferentes dependiendo del campo de fenómenos que se exploran en la enseñanza. Para comprender plenamente el concepto, es necesario integrar estos diferentes objetos mentales en un todo unificado.

Cuando se trata de comparar figuras planas en términos de área, existen diferentes métodos disponibles. Se puede hacer una comparación directa si una figura está contenida dentro de otra, o se puede hacer una comparación indirecta mediante transformaciones, congruencias y otras técnicas que preserven el área. Alternativamente, las cifras se pueden medir individualmente. La medición se puede realizar cubriendo la figura con áreas unitarias o mediante aproximaciones utilizando métodos interiores y exteriores. En estos casos, se utiliza la aditividad de áreas cuando se combinan figuras planas disjuntas, o se considera la convergencia de áreas cuando se utilizan aproximaciones. Sin embargo, no está claro si estos enfoques conducen al mismo resultado de medición y demostrar su equivalencia no es una tarea sencilla. Longitudes, áreas y volúmenes son medidas fundamentales en la geometría elemental.

Estos conceptos son cruciales en el estudio de la medición. El proceso de medición comienza comparando las cualidades de los objetos. Esta comparación se logra estableciendo una unidad y considerando los objetos como entidades que poseen la cualidad que se mide. Por ejemplo, si un objeto puede describirse como "largo", entonces se le puede atribuir longitud. Sin embargo, comprender la longitud, el área y el volumen como conceptos presenta desafíos debido a los diversos enfoques para definir los objetos mentales de área y volumen. Además, hay objetos mentales que sólo se manifiestan en un contexto matemático o matematizado. La geometría analítica sirve como ejemplo en la educación secundaria.

El uso de sistemas de coordenadas para la localización global condujo a la algebraización de la geometría a lo largo de la historia. El sistema de coordenadas cartesiano, en particular, es eficaz para describir figuras geométricas, movimientos mecánicos y funciones. Las propiedades geométricas se expresan algebraicamente a través de relaciones entre coordenadas, movimientos en funciones dependientes del tiempo y aplicaciones geométricas dentro de sistemas de funciones con múltiples variables. Los fenómenos característicos de la geometría analítica sólo pueden explorarse dentro de contextos matematizados, utilizando los sistemas de signos de expresiones algebraicas y representaciones cartesianas.

Capítulo 2

Freudenthal: Fundamentos de Álgebra y Geometría

El número

Es importante reconocer la naturaleza multifacética de los números y sus diversas interpretaciones y aplicaciones para poder comprender plenamente su significado e implicaciones. El desarrollo de los conceptos numéricos en la escuela secundaria sólo puede lograrse mediante la formación de objetos mentales sólidos, atravesando el campo semántico del "número". Es importante señalar que este proceso de formación de objetos mentales no es un evento único que da como resultado un objeto mental inmutable.

Los significados de los números pueden modificarse mediante factores como el uso de números negativos en el contexto ordinal y de secuencia, o expresiones decimales en el contexto de medición. Además, es importante reconocer que en la Escuela Secundaria los números no sólo se utilizan en los contextos mencionados anteriormente, sino también en otros contextos matematizados. La exploración del concepto de "número" en el lenguaje natural requiere una fenomenología didáctica que considere cómo se forman e integran los objetos mentales para dar cuenta de los diversos usos de "número" en diferentes contextos (Burkhardt, 1988).

Esta exploración comienza fuera del colegio y continúa durante toda la etapa de Primaria. Para introducir un análisis fenomenológico relevante para la etapa de Secundaria, es necesario hacer una breve referencia a estos fenómenos iniciales y estudiar cómo el significado de "número" se amplía y modifica con los nuevos fenómenos que encuentran los estudiantes en esta etapa. La ampliación del significado de los números alcanza su punto máximo en lo que se puede llamar el acceso algebraico al concepto de número. Esto implica organizar operaciones aritméticas y construir un concepto de número de nivel superior que sea distinto de los formados en contextos anteriores.

En este contexto, un número se define como algo que permite operaciones aritméticas. Este nuevo concepto de número, que tiene un significado histórico, legitima todos los números que antes se consideraban ajenos al verdadero concepto de número y, en consecuencia, se les dieron nombres diferentes. Como se mencionó anteriormente, el objeto mental de "número" se forma para organizar diversos fenómenos, que pueden entenderse examinando los objetos a los que se refieren los números (objetos individuales, conjuntos, palabras, los números mismos). Esto incluye considerar si los objetos son discretos o continuos, si están ordenados o no, y la naturaleza de las unidades y el número que describe los objetos. Estas características se pueden clasificar en diferentes contextos de uso de números, como contextos cardinales, ordinales, de medición, de secuencia, de conteo, de etiquetas, mágicos y de lectura. La combinación de todos estos usos en diferentes contextos forma el campo semántico de "número", y las experiencias de un individuo contribuyen a la formación de su objeto mental de "número".

El concepto de exclusión, que se refiere a la idea de considerar objetos no numéricos como números, existe desde el siglo XI. Durante esta época, los algebristas árabes como al-Karajī ya trataban los objetos algebraicos como números. Esta idea fue desarrollada aún más por Cantor, quien pretendía demostrar que los números transfinitos que había introducido eran de hecho números legítimos.

El concepto de "número" también se aplica a todas las operaciones aritméticas básicas. Así, la suma y la resta, sus significados se derivan de las acciones de contar, combinar conjuntos y comparar tamaños dentro de un campo de significado que se integra a través de herramientas didácticas correspondientes como la recta numérica. Sin embargo, la multiplicación y la división tienen significados aún más diversos. A diferencia de "número", los significados de estas operaciones están influenciados por nuevos fenómenos y diferentes tipos de números. Por ejemplo, cuando tratamos con fracciones o números decimales, necesitamos ampliar nuestra comprensión del "número de veces" para poder entender la multiplicación. Además, en contextos matemáticos más avanzados, las operaciones suelen verse como extensiones de conceptos algebraicos.

La razón es una función matemática que relaciona dos números o valores. Se puede calcular mediante operaciones aritméticas básicas, pero lo que importa es el valor que la función asigna a cada par, que se puede determinar mediante procedimientos algorítmicos. Sin embargo, si interpretamos una razón como simplemente el resultado de una división, perdemos de vista su verdadero significado. La importancia de una razón no radica en el proceso de asignar un valor, sino en la capacidad de comparar razones de igualdad o desigualdad, sin conocer sus magnitudes específicas.

El concepto de razón nos permite expresar afirmaciones como "a es a b como c es a d" sin reducir estas comparaciones a valores numéricos. Desde una perspectiva fenomenológica, el estatus lógico de la razón puede describirse en términos de la relación de equivalencia "que tienen la misma razón". Esto es consistente con la definición de Euclides en el libro V de los Elementos, donde no define "ratio" en sí, sino más bien la noción de razones que tienen la misma razón. Por lo tanto, se considera que el estatus lógico de la proporción es de un nivel más alto que el de los números, fracciones, longitudes y otros conceptos que normalmente se encuentran en la educación. Este nivel superior se caracteriza por una propiedad intensiva, que organiza las relaciones entre objetos o conjuntos de objetos en lugar de centrarse en sus propiedades extensivas.

La variedad de propiedades intensivas de los objetos organizados por la razón es enorme y abarca una amplia gama de factores. En el contexto de la enseñanza, es importante considerar una división importante dentro de estas propiedades: la relación puede ser una relación dentro de una sola magnitud o entre múltiples magnitudes. Esta división se puede representar mediante dos espacios de medida o magnitudes, con una aplicación lineal que los conecta.

La relación dentro de una magnitud se considera interna, mientras que la relación entre las dos magnitudes se considera externa. Una proporción involucra una función lineal que relaciona estos espacios de medición. La linealidad implica que las razones internas permanecen constantes bajo la función, y las razones externas entre los elementos a los que corresponde la función también son constantes.

La linealidad se demuestra a través del concepto implícito de espacios iguales que se recorren en tiempos iguales para razones internas, y a través de la función explícita $f(x)=\alpha x$, donde α representa una constante, para razones externas. Además, una fenomenología didáctica revela que el desarrollo del objeto mental de razón y proporción involucra objetos mentales precursores. Estos objetos mentales precursores son a menudo de naturaleza cualitativa e implican comparaciones de razones, proporcionando un contexto en el que se puede entender el concepto de igualdad de razones, o proporción. Un importante objeto mental precursor, identificado por Freudenthal como el objeto "relativamente" mental, desempeña un papel crucial en este proceso.

El concepto de "relativamente" permite afirmaciones significativas, como que un chocolate es más dulce que otro debido a su contenido de azúcar relativamente mayor. El término "relativamente" se refiere a un criterio de comparación, que puede ser implícito o explícito, como el peso. El objeto mental de "relativamente" se desarrolla en la enseñanza a través de varios pasos, incluida la comprensión de que las disposiciones pueden relativizarse, la comprensión del significado de "relativamente" como "en relación con...", el uso de "relativamente" y "en relación con" con comprensión, proporcionando una finalización adecuada de estos términos dentro de un contexto determinado, conocimiento operativo de su significado y la capacidad de explicar su significado a otros.

Algebra

El álgebra moderna es un campo de estudio que categoriza y analiza las características estructurales de colecciones de diversos objetos, incorporando operaciones definidas dentro de ellos. Estas propiedades y objetos se derivan de la forma en que se organizan los fenómenos de nivel inferior y han evolucionado con el tiempo. Un acontecimiento significativo en la historia del álgebra es la redacción del Libro conciso de al-jabr y al-muqābala por al-Khwārizmī en el siglo

IX. Esto marca el nacimiento del álgebra como una disciplina distinta dentro de las matemáticas.

El enfoque del álgebra de Al-Khwārizmī es único porque establece los diferentes tipos de números necesarios para los cálculos, como tesoros, raíces y números simples. Luego explora las combinaciones de estos tipos y desarrolla algoritmos para resolver cada tipo. Estos tipos sirven como formas canónicas a las que se puede reducir cualquier problema. La contribución de Al-Khwārizmī no radica en los métodos de resolución, sino en el establecimiento de un conjunto integral de formas canónicas resolubles y la organización de su aplicación a la resolución de problemas.

Otro avance significativo en álgebra se atribuye a Galois, quien pasó de buscar nuevas soluciones a estudiar las condiciones de solubilidad de ecuaciones. La historia del álgebra desde entonces puede verse como una serie de avances resultantes de la objetivación de métodos de organización del nivel anterior. Sin embargo, esta perspectiva histórica no es particularmente relevante para el álgebra que se enseña en el plan de estudios de la escuela secundaria actual, ya que ha abandonado en gran medida el álgebra moderna introducida en la década de 1970.

En cambio, es más importante analizar las características del lenguaje natural y los sistemas de signos de la aritmética escolar, ya que proporcionan la base para que los estudiantes adquieran el lenguaje del álgebra. Para realizar este análisis, Freudenthal examina diversos aspectos, como las reglas de transformación en el lenguaje natural, el lenguaje aritmético, el lenguaje como acción, la formalización como medio y como objetivo, la construcción algorítmica de nombres propios, las reglas de puntuación y el uso de variables en el lenguaje cotidiano.

En el lenguaje de las matemáticas, las variables juegan un papel importante. El signo igual es otro elemento importante que ayuda a establecer la igualdad entre diferentes expresiones matemáticas. Se emplean estrategias y tácticas algebraicas para resolver ecuaciones y manipular expresiones matemáticas. La sustitución formal es una técnica utilizada para reemplazar variables con valores específicos.

El principio algebraico de permanencia establece que si dos expresiones son iguales y una se modifica, la otra expresión también debe modificarse de la misma manera para mantener la igualdad. La traducción algebraica implica convertir problemas planteados o situaciones de la vida real en expresiones o ecuaciones algebraicas. Pasando al álgebra lineal, se la considera una herramienta práctica más que un estudio histórico de sus orígenes.

En lugar de explorar el contexto histórico del álgebra lineal, la atención se centra en sus aplicaciones y en cómo puede organizar y dar sentido a los fenómenos en diversos campos. El concepto de álgebra lineal puede entenderse examinando su significado en contextos de aplicación específicos. Por ejemplo, al producto de matrices se le puede dar importancia aplicándolo para graficar matrices de conectividad. Esta comprensión puede luego extenderse a otros contextos sin depender del contenido específico sino más bien de la expresión y manipulación de las matrices.

Los objetos geométricos

El concepto de espacio, tanto como construcción mental como idea matemática, no se originó como fundamento de la geometría. Más bien, es el resultado de un largo proceso de desarrollo. Según Freudenthal, mientras que los objetos geométricos existen dentro del espacio como conceptos, los correspondientes objetos mentales asociados con estos conceptos están en realidad situados dentro de un contexto geométrico.

Nuestro punto de partida, tanto en el sentido histórico como en la historia personal de cada individuo, no son los fenómenos que sólo pueden experimentarse en un nivel ya definido por las matemáticas y organizado mediante el concepto de espacio. Más bien, son otros fenómenos y contextos los que vienen primero. Inicialmente, los fenómenos organizados son formas y configuraciones que se observan en un contexto visual, como contornos y líneas de visión. Estos están estrechamente relacionados con la creación humana misma, ya que los humanos producen formas "geométricas".

Los objetos geométricos, como conceptos, se desarrollan a partir de objetos mentales que sirven como herramientas para organizar las figuras "geométricas" que se observan o dibujan en la Tierra. Al definir estos objetos, sus definiciones deben separarse de las propiedades sensoriales de las figuras que pretenden organizar. Por ejemplo, Euclides define un punto como algo sin partes y una línea como un largo sin ancho, utilizando propiedades que resaltan deficiencias y desapegos. Esto crea un concepto separado del objeto mental que organiza los fenómenos correspondientes. Por lo tanto, cualquier acción u observación realizada con estas figuras debe ser analizada para ser aceptada como objeto geométrico. Por ejemplo, si se dibuja un círculo en el suelo o en un papel y se le añade una línea tangente, en el dibujo no se cruzan en un solo punto sino "a lo largo de toda su longitud", como argumenta Protágoras.

Para aprender geometría de forma eficaz, los dibujos deben ubicarse en contextos geométricos. Además, las relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico no se pueden aprender sin una instrucción adecuada. Colette Laborde propone una solución a este problema en el contexto del Cabri-geómetro. Los estudiantes están expuestos a situaciones problemáticas que involucran dibujos, donde la geometría se convierte en una herramienta útil para modelar y resolver problemas. Por ejemplo, la geometría permite la creación de dibujos que cumplen restricciones específicas de una manera más eficiente que el método de prueba y error. La exactitud de los resultados se puede garantizar mediante principios de geometría, como la tangencia de una línea a un círculo cuando es perpendicular al radio. Asimismo, a los estudiantes también se les presentan situaciones de geometría en las que el dibujo y la experimentación ayudan a evitar largas soluciones teóricas.

La propia naturaleza del dibujo también influye en su interpretación. Un dibujo sólo puede referirse a objetos teóricos de la geometría en la medida en que el lector decida interpretarlo como tal. La interpretación está influenciada por la teoría elegida por el lector y sus conocimientos. Y, el contexto en el que se presenta el dibujo es crucial para determinar el tipo de interpretación. Un objeto mental bien desarrollado debe incorporar un análisis de los elementos de la figura y las relaciones entre ellos. También, la relación entre el dibujo y el objeto geométrico es compleja porque requiere interpretación por parte de un sujeto humano.

En consecuencia, es posible que un dibujo geométrico no siempre se interprete como la representación de un objeto geométrico, y las interpretaciones de un mismo dibujo pueden variar según el lector, sus conocimientos y el contexto. Durante la época de Euclides, los matemáticos descubrieron que existía una brecha significativa entre el concepto construido por Euclides y el objeto mental primitivo. Sin embargo, también se dieron cuenta de que para representar objetos geométricos se utilizaban figuras geométricas dibujadas sobre papel, conocidas como dibujos geométricos. Esta relación entre la figura, el dibujo y el objeto geométrico es crucial en la formación de los objetos mentales correspondientes y la comprensión de conceptos.

Por el contrario, cuando se considera un entorno informático como Cabri-geometer, se altera la dinámica entre el dibujo y los objetos geométricos, como acabamos de comentar. Los dibujos creados con Cabri en una pantalla de computadora, conocidos como Cabri-dibujos, exhiben comportamientos diferentes en comparación con los dibujos hechos a lápiz sobre papel. Esto se debe a que los dibujos de Cabri no se dibujan manualmente, sino que se definen mediante primitivas del programa que siempre se alinean con las propiedades geométricas.

La modificación de un dibujo Cabri resultante del movimiento de sus elementos trastoca ciertas interpretaciones del dibujo basadas en sus propiedades espaciales. Además, en la experiencia de los estudiantes, el ámbito de los fenómenos organizados por objetos geométricos en la Escuela Secundaria es increíblemente diverso y se puede encontrar en diversos aspectos de la naturaleza, el arte y las creaciones humanas. Aunque no haremos una lista exhaustiva, cabe señalar que esta abundancia de fenómenos geométricos se ha ampliado significativamente en los últimos tiempos con la aparición de productos infográficos como videojuegos, imágenes digitales utilizadas como portadas de programas de televisión, videoclips y juegos de ordenador.

Los movimientos

Las transformaciones geométricas implican el movimiento físico de figuras geométricas. Sin embargo, existe una relación compleja y conflictiva entre las características geométricas de estas transformaciones y las propiedades espaciales de los movimientos. Esto conduce a dificultades para reconocer que diferentes caminos pueden resultar en la misma transformación, aceptar ciertas transformaciones como identidades, etc. Es importante considerar esta brecha entre los fenómenos del mundo real y los conceptos matemáticos de transformaciones geométricas. Teniendo esto en cuenta, hay muchos fenómenos en el entorno de los estudiantes que pueden explorarse y que son relevantes para comprender las transformaciones geométricas.

La estadística

La estadística descriptiva se ha desarrollado con el propósito de organizar los datos numéricos proporcionados y abarca una amplia gama de fenómenos sociales, políticos y económicos. Estos fenómenos sirven como contextos en los que se aplican conceptos estadísticos y es importante considerarlos como oportunidades educativas, ya que permiten a los individuos experimentar y formar objetos mentales relacionados con la estadística.

Los conceptos de estadística se ocupan principalmente de la información cuantitativa contenida en los datos y tienen como objetivo resumirla, caracterizarla y organizarla de una manera que facilite la comparación con otros conjuntos de datos masivos. En la vida cotidiana, los conceptos estadísticos se pueden observar en diversos medios de comunicación, como la prensa y la televisión, donde se utilizan para describir diferentes temas o predecir el comportamiento de los votantes durante las campañas políticas.

Estas aplicaciones de la vida real contribuyen a la comprensión y formación de objetos mentales relacionados con la estadística. Sin embargo, dentro del ámbito de la inferencia estadística, los fenómenos se vuelven más complejos y abstractos, ya que implican derivar conocimiento a partir de la observación de características de los casos. Ian Hacking ha señalado los desafíos que supone establecer la inferencia estadística en el marco de la ciencia galileana, ya que requiere navegar por el concepto de "evidencia aceptable" en diferentes períodos históricos y prácticas sociales. La contribución de Fisher a este campo es significativa, ya que introduce la idea de que rechazar la hipótesis nula no equivale a refutarla por completo. En cambio, la alternativa es rechazar o cometer un error al rechazar la hipótesis nula.

La probabilidad

La probabilidad tiene sus raíces en el ámbito de los juegos de azar y de eventos inciertos, como los sorteos de lotería o los patrones climáticos. En el lenguaje cotidiano, el término "probable" puede tener dos significados: sugiere que algo puede suceder, pero también implica una creencia personal de que sucederá. La distinción entre estas interpretaciones a menudo se transmite a través del énfasis del hablante. Así, los términos "probable" y "posible" tienen un significado estrechamente relacionado. Se han propuesto varias perspectivas, incluidos los puntos de vista logicista, subjetivista y frecuencialista, para explicar el concepto de probabilidad. Estas teorías arrojan luz sobre la diversa gama de fenómenos que caen bajo el paraguas de la probabilidad.

A menudo se encuentran desafíos a la hora de definir las ideas fundamentales de probabilidad y aleatoriedad. Se puede construir una comprensión sólida de la aleatoriedad y la probabilidad utilizando elementos derivados de las especificaciones de Kolmogorov: Un evento puede tener múltiples resultados posibles. El resultado del evento no se puede predecir con certeza, incluso con el conocimiento de quienes lo observan. El evento puede repetirse en condiciones idénticas un número significativo de veces, lo que permite sacar conclusiones generalizables. La secuencia de resultados obtenidos durante la repetición no muestra ningún patrón discernible que pueda ser previsto por el observador. A medida que aumenta el número de repeticiones, las fluctuaciones en las frecuencias relativas de los resultados se vuelven más estables y su magnitud disminuye gradualmente de manera predecible.

Las variables

La práctica actual en matemáticas de referirse a "variables" como medios para expresar proposiciones generales, que en realidad son lo que Freudenthal denomina "nombres polivalentes", es un desarrollo relativamente reciente. Tradicionalmente, el término "variable" siempre ha denotado algo que realmente fluctúa o cambia, ya sea en el ámbito físico, social, mental o matemático. Inicialmente, el concepto de variables abarcaba fenómenos observables en los ámbitos físico, social y mental, pero finalmente se amplió para incluir objetos matemáticos como números, magnitudes y puntos, que también se consideran variables.

El concepto de función se origina a partir del reconocimiento de una relación o dependencia entre variables. Esta dependencia puede establecerse, postularse, generarse o replicarse dentro de los ámbitos físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que también pueden tener conexiones con variables de otros dominios. A medida que se explora más a fondo esta dependencia, se puede objetivar y tratar como una construcción mental. Sin embargo, antes de que pueda ocurrir esta objetivación, la dependencia primero debe ser experimentada, utilizada, estimulada, hecha consciente, considerada como un objeto, dada un nombre y situada dentro de un marco más amplio de interdependencias:

- Las funciones surgieron como relaciones entre magnitudes de variables cuya variabilidad se comparó en cantidades infinitesimales.
- La libertad de cambiar variables de dependientes a independientes y entre independientes llevó a un nuevo tipo de operación con funciones: composición e inversión. Fue esta nueva riqueza operativa la que condujo al éxito del concepto de función.
- La necesidad de distinguir entre variables dependientes e independientes ha llevado a hacer hincapié en las funciones más que en las relaciones. A pesar de lo que sugieren las expresiones algebraicas y analíticas, el desarrollo ha tendido hacia funciones univalentes.

- Un cambio de perspectiva llevó de describir datos visuales a través de funciones expresadas analíticamente a visualizar funciones a través de gráficos.
- Aparece una función arbitraria en el cálculo de variaciones y resolución de ecuaciones diferenciales. Esta "arbitrariedad" se refiere no sólo a la naturaleza de la dependencia funcional, sino también a la naturaleza de las variables, que pueden ser números, puntos, curvas, funciones, elementos de conjuntos arbitrarios.
- Funciones de análisis, transformaciones geométricas, permutaciones de conjuntos finitos y aplicaciones entre conjuntos arbitrarios se combinan para crear el concepto general de función.
- Este concepto, a su vez, se utiliza para organizar una amplia variedad de objetos, desde operaciones algebraicas hasta predicados lógicos.

Esta última riqueza de fenómenos tan diversos integrados en el concepto general de función, fenómenos que, además, muchos de ellos pertenecen al propio mundo de las matemáticas, hace que la función como objeto mental sea mucho más compleja que el número de objetos. geométrica o incluso la razón. El concepto de función sólo puede dominarse en etapas avanzadas de la escolarización, cuando los estudiantes ya pueden haber tenido experiencia con un gran número de estos fenómenos. Lo que realmente puede constituirse como objeto mental en la educación secundaria es la idea de dependencia variable y funcional, y resulta difícil salvar incluso las transformaciones geométricas que también se están experimentando.

Al profundizar exhaustivamente en estos conceptos, que desafortunadamente no pueden explorarse completamente dentro de los límites de esta discusión, nos damos cuenta del vasto abismo que existe entre estos conceptos mismos y sus orígenes en los fenómenos iniciales y las primeras construcciones mentales que emergen. en el ámbito de las matemáticas y en las experiencias personales de los individuos. Esto recuerda el famoso comentario de Cantor a Dedekind, en el que confesaba, quizás intencionalmente, que era capaz de percibir la validez de un determinado concepto, pero que luchaba por abrazar plenamente su realidad.

El argumento del autor sobre la existencia de cardinales infinitamente diferentes utilizando el método diagonal sirve como un claro ejemplo de los desafíos que plantean conceptos matemáticos como continuidad e infinito. Estos conceptos no tienen correspondencias directas en nuestras experiencias físicas y no está claro si el infinito es un concepto singular. Los matemáticos desarrollaron estos conceptos para comprender y organizar fenómenos que ocurren dentro del ámbito de las matemáticas, donde los objetos se producen o se producen en contextos altamente matematizados. Sin embargo, enseñar estos conceptos requiere considerar que una comprensión profunda de ellos sólo puede lograrse a través de la experiencia de los fenómenos que organizan.

Si bien la adquisición de estos conceptos puede presentar dificultades, no significa que deban abandonarse. En cambio, un enfoque didáctico debería implicar la creación de una variedad de experiencias que abarquen los diversos fenómenos relevantes y la organización de la instrucción de una manera que permita la formación de un objeto mental capaz de lidiar con esos fenómenos.

Además, es importante reconocer que muchos de los fenómenos cruciales para formar objetos mentales fuertes son intrínsecos a los propios medios matemáticos de organización, que pueden estudiarse a un nivel superior.

Capítulo 3

Perspectivas de la educación en matemáticas

Al considerar las propias ideas sobre las matemáticas, pueden surgir una variedad de opiniones y creencias sobre el tema, la actividad matemática y la capacidad de aprender matemáticas. Esta discusión puede parecer irrelevante para los profesores que se preocupan principalmente por mejorar la eficacia de su enseñanza. El concepto de conocimiento pertenece a la rama de la filosofía conocida como epistemología, que explora las teorías del conocimiento. Sin embargo, las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas pueden influir en gran medida en las acciones de un profesor en el aula.

Por ejemplo, imaginemos a un profesor que cree que los objetos matemáticos tienen existencia propia, aunque sea inmaterial. Desde el punto de vista de este profesor, objetos como triángulos, sumas, fracciones y probabilidades existen independientemente de las personas que los utilizan o de los problemas a los que se aplican, e incluso independientemente de la cultura. Según esta creencia, la mejor manera de enseñar matemáticas sería presentar estos objetos a los estudiantes, de forma similar a como se le mostraría a un niño un elefante en el zoológico o a través de un vídeo.

¿Cómo podemos demostrar qué es un círculo u otro objeto matemático? Este profesor diría que el mejor enfoque es enseñar las definiciones y propiedades de estos objetos, ya que esto es lo que constituye "saber matemáticas". La aplicación de conceptos o la resolución de problemas matemáticos se consideraría secundaria y se enseñaría una vez que el alumno haya dominado los propios objetos matemáticos. Por otro lado, algunos profesores ven las matemáticas como un producto del ingenio y la actividad humanos, de forma muy parecida a la música o la literatura. Ven las matemáticas como algo que se inventó como resultado de la curiosidad humana y la necesidad de resolver una variedad de problemas, como el comercio de bienes, la construcción, la ingeniería y la astronomía.

Para estos profesores, la naturaleza fija de los objetos matemáticos hoy, o en períodos históricos anteriores, es resultado de la negociación social. Los individuos que crearon estos objetos tuvieron que ponerse de acuerdo sobre sus reglas de funcionamiento, asegurando que cada nuevo concepto encajara coherentemente con los existentes. Además, la historia de las matemáticas muestra que las definiciones, propiedades y teoremas establecidos por matemáticos de renombre no son infalibles y están sujetos a evolución.

Con esta perspectiva en mente, aprender y enseñar matemáticas debe reconocer que los estudiantes naturalmente encuentran dificultades y cometen errores durante el proceso de aprendizaje, y que estos errores pueden servir como valiosas oportunidades de aprendizaje. Esto se alinea con las teorías psicológicas constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas, que se basan en la visión filosófica de las matemáticas conocida como constructivismo social.

La concepción idealista platónica

Dentro de la amplia gama de creencias sobre la relación entre las matemáticas y sus aplicaciones prácticas, así como su importancia en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje, existen dos concepciones distintas y contrastantes. Una de estas concepciones, que prevaleció entre numerosos matemáticos profesionales hasta hace relativamente poco tiempo, afirma que los estudiantes deben primero comprender las estructuras fundamentales de las matemáticas de manera axiomática.

Se supone que una vez que esta base esté firmemente establecida, al estudiante le resultará relativamente fácil resolver las diversas aplicaciones y problemas que surjan. Según esta perspectiva, sin una base matemática sólida, será difícil aplicar los principios matemáticos, excepto en escenarios extremadamente simplistas. En consecuencia, las matemáticas puras y las aplicadas se perciben como disciplinas separadas, con estructuras matemáticas abstractas que tienen prioridad sobre sus aplicaciones en los ámbitos natural y social.

Las aplicaciones prácticas de las matemáticas se consideran un "apéndice" al estudio de las matemáticas y, por lo tanto, ignorar este apéndice no causaría ningún daño a la comprensión del estudiante. Quienes suscriben esta creencia ven las matemáticas como una disciplina autónoma, capaz de desarrollarse sin considerar sus aplicaciones a otras ciencias, basándose únicamente en problemas matemáticos internos. Esta concepción particular de las matemáticas se conoce como perspectiva "idealista-platónica". Esta perspectiva permite crear un currículo relativamente sencillo, ya que no es necesario incorporar aplicaciones de otras áreas (Gravemeijer, 1994). En cambio, estas aplicaciones se "filtran" para abstraer los conceptos, propiedades y teoremas matemáticos, lo que da como resultado un dominio matemático "puro".

La concepción contructivista

Muchos matemáticos y profesores de matemáticas sostienen que las matemáticas deberían tener una fuerte conexión con sus aplicaciones en el mundo real en diversas materias. Creen que es crucial demostrar a los estudiantes la practicidad y relevancia de cada concepto matemático antes de presentarlo. La idea es mostrar a los estudiantes cómo las diferentes partes de las matemáticas sirven para propósitos específicos. Por ejemplo, al colocar a los niños en situaciones en las que necesitan intercambiar artículos, les creamos la necesidad de comparar, contar y organizar colecciones de objetos.

Esto les introduce gradualmente en el concepto de números naturales. Según esta perspectiva, las aplicaciones de las matemáticas, tanto externas como internas, deberían venir antes y después del desarrollo de los conceptos matemáticos. Estas aplicaciones deberían surgir naturalmente como respuesta a los problemas encontrados en los entornos físicos, biológicos y sociales en los que vivimos los humanos. Los estudiantes deben poder reconocer que la axiomatización, la generalización y la abstracción en matemáticas son necesarias para comprender y resolver problemas del mundo real.

Los defensores de este enfoque de las matemáticas y su enseñanza preferirían comenzar con problemas de la naturaleza y la sociedad y utilizarlos como base para construir las estructuras fundamentales de las matemáticas. De esta manera, los estudiantes obtendrían una comprensión más profunda de la estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones. Sin embargo, desarrollar un currículo basado en este enfoque constructivista es complejo porque requiere conocimientos no sólo de matemáticas sino también de otros campos.

Las estructuras que se encuentran en las ciencias físicas, biológicas y sociales suelen ser más complejas que las de las matemáticas y no siempre se alinean perfectamente con estructuras puramente matemáticas. Aunque existe una gran cantidad de material sobre las aplicaciones de las matemáticas en diversas áreas, la tarea de seleccionar, organizar e integrar este material no es sencilla.

Las matemáticas y la sociedad

Enseñar matemáticas implica no sólo impartir conocimientos y habilidades, sino también fomentar la comprensión y el aprecio por el papel de las matemáticas en la sociedad y el poder y las limitaciones del método matemático. Las matemáticas tienen una rica historia de evolución para resolver problemas prácticos y han desempeñado un papel crucial en el desarrollo de diversos campos. Así, también los conceptos dentro de las matemáticas han sufrido cambios a lo largo del tiempo, adaptándose a nuevos enfoques y avances de la tecnología.

Al reconocer estos aspectos, los educadores pueden brindar a los estudiantes una comprensión integral de las matemáticas y su importancia en la sociedad. Este patrón de evolución de las matemáticas en respuesta a diversos problemas no es exclusivo de la estadística. La geometría, por ejemplo, surgió de la necesidad de resolver problemas agrícolas y arquitectónicos. Diferentes sistemas de numeración evolucionaron junto con la necesidad de cálculos aritméticos más rápidos.

La teoría de la probabilidad se desarrolló para abordar problemas relacionados con los juegos de azar. Las matemáticas sirven como marco sobre el cual se construyen los modelos científicos, ayudando en el proceso de modelar la realidad y, a menudo, validando estos modelos. Los cálculos matemáticos, por ejemplo, permitieron descubrir la existencia de planetas distantes en nuestro sistema solar mucho antes de que pudieran ser observados. Desde una perspectiva histórica, resulta evidente que las matemáticas son un cuerpo de conocimientos en constante evolución.

A lo largo de su evolución, la necesidad de resolver problemas prácticos (tanto dentro de las propias matemáticas como en relación con otras disciplinas) ha jugado un papel importante. Por ejemplo, los orígenes de las estadísticas se remontan a civilizaciones antiguas como la china, la sumeria y la egipcia, que recopilaban datos sobre población, bienes y producción. Incluso la Biblia hace referencias a contar a los israelitas en edad de servicio militar en el libro de Números. Los propios censos ya estaban establecidos en el Imperio Romano en el siglo IV a.C. Sin embargo, sólo recientemente la estadística ha adquirido el estatus de ciencia.

En el siglo XVII, la aritmética política surgió de la escuela alemana de Conring. Achenwall, discípulo de Conring, centró su trabajo en la recopilación y análisis de datos numéricos con fines específicos, sentando las bases del método estadístico. Este ejemplo demuestra cómo las matemáticas, incluida la estadística, se han desarrollado en respuesta a diversos problemas.

Al considerar la enseñanza de las matemáticas, es crucial reflexionar sobre dos objetivos importantes:

- En primer lugar, nuestro objetivo es que los estudiantes comprendan y aprecien el papel de las matemáticas en la sociedad, incluidas sus diversas aplicaciones y contribuciones al desarrollo social.
- En segundo lugar, nos esforzamos en que los estudiantes comprendan y valoren el método matemático, que abarca los tipos de preguntas que las matemáticas pueden ayudar a responder, las formas fundamentales de razonamiento y trabajo matemático, así como sus fortalezas y limitaciones.

Si bien, la evolución de las matemáticas no es únicamente la acumulación de conocimientos o el desarrollo de nuevos campos de aplicación. Los propios conceptos dentro de las matemáticas han sufrido cambios de significado a lo largo del tiempo, ampliándose, especificándose, revisándose, ganando relevancia o, en ocasiones, quedando relegados a un segundo plano. Por ejemplo, el cálculo de probabilidades experimentó una transformación significativa con la incorporación de conceptos de la teoría de conjuntos a la axiomática de Kolmogorov.

Este nuevo enfoque permitió la aplicación del análisis matemático a la probabilidad, lo que condujo a avances en la teoría y sus aplicaciones prácticas en el último siglo . De manera similar, el cálculo manual de logaritmos y funciones circulares (por ejemplo, senos, cosenos) solía enseñarse ampliamente, y los estudiantes dedicaban horas a aprender algoritmos relacionados. Sin embargo, con la llegada de las calculadoras y las computadoras, estas funciones ahora se pueden calcular directamente, lo que hace que el cálculo manual quede obsoleto. La misma tendencia parece ocurrir hoy con el cálculo de raíces cuadradas.

El propósito de las matemáticas

Las aplicaciones matemáticas desempeñan un papel importante en nuestra vida cotidiana y es fundamental que los estudiantes lo reconozcan y aprecien. Para lograr esto, es importante para nosotros brindar ejemplos y situaciones integrales en clase que demuestren la amplia gama de fenómenos que las matemáticas nos permiten organizar y comprender (Higginson, 1980).

Más allá del contexto biológico y físico del individuo, vivimos en una sociedad llena de situaciones matemáticas. Las actividades familiares, escolares, laborales y de ocio implican elementos matemáticos. Se pueden realizar estudios numéricos o estadísticos para cuantificar el número de hijos en una familia, la edad de los padres al casarse, los tipos de trabajo que realizan las personas y las diferentes creencias y pasatiempos dentro de las diferentes familias. Se depende del transporte público para ir a la escuela o irse de vacaciones, y podemos estimar factores como el tiempo de viaje, la distancia y la cantidad de pasajeros que utilizan los autobuses.

Durante el tiempo libre, participamos en juegos de azar como billares o loterías, y asistimos a eventos deportivos cuyos resultados son inciertos y es posible que tengamos que hacer cola para comprar entradas. Comprar pólizas de seguro, invertir en el mercado de valores y tomar decisiones financieras son ejemplos en los que las estadísticas y la probabilidad son herramientas esenciales.

Un área donde las matemáticas son aplicables es la biología. Se puede recordar a los estudiantes que muchas características heredadas, como el sexo, el color del cabello y el peso al nacer, no se pueden predecir de antemano. Además, rasgos como la altura, la frecuencia cardíaca y el recuento de glóbulos rojos pueden variar según el momento en que se miden. La probabilidad nos permite describir y analizar estas características.

En el campo de la medicina, se realizan estudios epidemiológicos estadísticos para cuantificar la condición de un paciente y seguir su progresión mediante tablas y gráficos. Luego, estas condiciones se comparan con los valores promedio en un individuo sano. La determinación del recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre es un ejemplo de situaciones que implican el razonamiento proporcional y el concepto de muestreo.

Los modelos matemáticos de crecimiento demográfico también se utilizan para hacer predicciones sobre la población mundial, la posibilidad de extinción de ballenas, la propagación de enfermedades e incluso la esperanza de vida de los individuos. La naturaleza nos proporciona numerosos ejemplos de conceptos geométricos, que pueden abstraerse y estudiarse. A medida que los estudiantes crecen, se pueden proponer actividades de medición para ayudarlos a diferenciar diferentes magnitudes y estimar cantidades como el peso y la longitud. Los gobiernos en diversos niveles necesitan información para tomar decisiones informadas. Por eso se realizan censos y encuestas. Desde los resultados electorales hasta los censos de población, una amplia gama de estadísticas influye en las decisiones gubernamentales. Los índices de precios al consumidor, las tasas de población activa, la inmigración y la emigración, las estadísticas demográficas y la producción de diferentes bienes y el comercio son ejemplos de ratios y proporciones de los que escuchamos a diario en las noticias.

En el mundo económico, la contabilidad nacional y empresarial, así como el control y la previsión de los procesos productivos, se basan en métodos y modelos matemáticos. En nuestra compleja economía, es esencial tener una comprensión básica de las matemáticas financieras. Operaciones cotidianas como abrir una cuenta corriente, suscribirse a un plan de pensiones u obtener un préstamo hipotecario requieren este tipo de matemáticas.

Más allá del contexto biológico, nuestra vida cotidiana también está inmersa en un entorno físico. La medición de magnitudes como la temperatura y la velocidad es esencial. Las construcciones que nos rodean, como edificios, caminos, puentes y plazas, presentan oportunidades para analizar formas geométricas. El desarrollo de estas estructuras requiere cálculos, mediciones, estimaciones y análisis estadísticos.

Los fenómenos meteorológicos proporcionan excelentes ejemplos de eventos aleatorios. La duración, intensidad y extensión de la lluvia, las tormentas y el granizo, así como las temperaturas máximas y mínimas y la intensidad y dirección del viento, son todas variables aleatorias. Las consecuencias de estos fenómenos, como el volumen de agua en un pantano o la magnitud de los daños causados por inundaciones o granizo, también ofrecen oportunidades para estudiar estadísticas y probabilidades.

La cultura matemática

Colocar la resolución de problemas y el modelado a la vanguardia de la educación matemática tiene importantes implicaciones educativas. Sería contradictorio presentar las matemáticas como algo cerrado, desconectado de la realidad y completo, considerando sus orígenes históricos y sus aplicaciones actuales. Es crucial reconocer que el conocimiento matemático nos permite modelar y resolver problemas de diferentes campos, mientras que los problemas que se originan en contextos no matemáticos a menudo forman la base intuitiva para el desarrollo de nuevos conocimientos matemáticos.

La educación tiene como objetivo desarrollar ciudadanos integrales y, con la evolución del concepto de cultura en la sociedad moderna, el papel de las matemáticas está ganando reconocimiento. La educación matemática tiene como objetivo cultivar este aspecto cultural. Sin embargo, el objetivo no es transformar a los futuros ciudadanos en "matemáticos aficionados" ni entrenarlos en cálculos complejos, ya que los ordenadores ahora pueden realizar este tipo de tareas (Gravemeijer, 1997). En cambio, el objetivo es dotar a las personas de la capacidad de interpretar y evaluar críticamente información y argumentos matemáticos respaldados por datos encontrados en diversos contextos, como los medios de comunicación o su trabajo profesional.

Asimismo, la educación matemática tiene como objetivo mejorar las habilidades de comunicación, permitiendo a las personas discutir y transmitir información matemática de manera efectiva, así como resolver problemas matemáticos encontrados en la vida diaria o en entornos profesionales. Desde una perspectiva pedagógica y epistemológica, es crucial diferenciar entre el proceso de construcción del conocimiento matemático y las características del conocimiento matemático bien desarrollado.

La formalización, la precisión y la ausencia de ambigüedad son rasgos asociados a las matemáticas como ciencia madura. Sin embargo, la construcción del conocimiento matemático, tanto históricamente como en el proceso de aprendizaje individual, es inseparable de actividades concretas, intuición y enfoques inductivos activados a través de tareas y resolución de problemas. Adquirir experiencia y comprensión de nociones, propiedades y relaciones matemáticas a través de aplicaciones del mundo real no es solo un requisito previo para la formalización, sino también una condición necesaria para interpretar y utilizar correctamente el potencial dentro de las estructuras matemáticas formales (Mosterín, 1987).

Cuando se trata de la enseñanza de las matemáticas, es fundamental adaptar el enfoque a la edad y al nivel de conocimientos de los estudiantes. Diferentes individuos tienen necesidades y percepciones distintas del entorno físico y social, así como intereses diferentes en comparación con los adultos. Por lo tanto, transferir mecánicamente situaciones "reales", incluso si son significativas para los adultos, puede no captar el interés de los estudiantes.

La construcción histórica de las matemáticas destaca la importancia del razonamiento empírico-inductivo, que a menudo juega un papel más activo en el desarrollo de nuevos conceptos en comparación con el razonamiento deductivo. Los matemáticos no formulan teoremas en el primer intento. En cambio, se basan en ensayos previos, ejemplos y contraejemplos, soluciones de casos específicos y la capacidad de modificar las condiciones iniciales para investigar los resultados. Estos procesos intuitivos proporcionan pistas invaluables para desarrollar proposiciones y teorías. Descuidar estos procedimientos intuitivos, como se observa en algunas propuestas curriculares, priva a los estudiantes de una poderosa herramienta para explorar y construir conocimientos matemáticos (English, 2008).

El lenguaje y la comunicación

Las matemáticas, al igual que otras disciplinas científicas, abarcan un conjunto de conocimientos que posee sus propias características y organización interna únicas. Lo que distingue al conocimiento matemático es su increíble capacidad para comunicarse de forma concisa y sin ambigüedades. Esto es posible mediante el uso de varios sistemas de notación simbólica, como números, letras, tablas y gráficos. Al utilizar estas herramientas, las matemáticas pueden representar con precisión una amplia gama de información, llamando la atención sobre aspectos y relaciones que pueden no ser fácilmente observables.

Así, las matemáticas nos permiten anticipar y predecir eventos, situaciones o resultados futuros que aún no han ocurrido. Tomemos, por ejemplo, la expresión "2n" para representar un número par. Esta simple ecuación es equivalente a (n+1)+(n-1), lo que revela que todo número par se puede expresar como la suma de dos números impares consecutivos. Sin embargo, sería un error suponer que el poder del conocimiento matemático reside únicamente en sus notaciones simbólicas precisas e inequívocas. En realidad, la capacidad de estas notaciones para representar, explicar y predecir está profundamente arraigada en la naturaleza del conocimiento matemático mismo, y las notaciones actúan como un marco de apoyo.

El énfasis en la necesidad de una actividad constructiva no debería llevar a ignorar la estructura interna de las matemáticas, que sirve para conectar y organizar sus diversos componentes. De hecho, la estructura de las matemáticas es particularmente compleja y significativa. Esta estructura tiene un aspecto vertical, donde ciertos conceptos se basan en otros, creando una secuencia temporal en el aprendizaje.

En ocasiones, requiere trabajar determinados aspectos únicamente con el fin de integrar otros, que se consideran más importantes desde el punto de vista educativo. Sin embargo, es importante señalar que rara vez existe un camino único o claramente superior y, si lo hay, suele estar basado en la pedagogía más que en la epistemología. Por el contrario, ciertas concepciones sobre la estructura interna de las matemáticas pueden obstaculizar el aprendizaje, como lo demuestra el intento de basar todas las matemáticas escolares en la teoría de conjuntos.

Otra implicación de la naturaleza relacional de las matemáticas es la existencia de estrategias o procedimientos generales que pueden aplicarse en diferentes campos y para diversos propósitos. Por ejemplo, conceptos como número, contar, ordenar, clasificar, simbolizar, inferir, etc. son igualmente útiles en geometría y estadística. Para ayudar a los estudiantes a reconocer la similitud y utilidad de estas estrategias y procedimientos desde diferentes perspectivas, es importante seleccionar cuidadosamente los contenidos didácticos y prestarles especial atención.

El fundamento del conocimiento lógico-matemático radica en la capacidad del ser humano para establecer relaciones entre objetos o situaciones a partir de su interacción con ellos. Esta capacidad incluye la capacidad de abstraer y considerar estas relaciones por encima de otras que también puedan estar presentes. Por ejemplo, en las afirmaciones "A es más grande que B", "A es tres centímetros más grande que B", "B es tres centímetros más corto que A", etc., no estamos simplemente describiendo propiedades de los objetos A y B mismos.

En cambio, estamos expresando la relación entre una propiedad compartida - el tamaño - que es el resultado de comparar los objetos en términos de esta propiedad, ignorando muchas otras propiedades posibles como color, forma, masa, densidad, volumen, etc. como "mayor que", "menor que", "tres centímetros más que", "tres centímetros menos que", etc. son construcciones mentales más que observaciones directas de las propiedades del objeto. Incluso describir los objetos A y B como grandes o pequeños implica compararlos con otros objetos similares que uno haya encontrado en el pasado.

Este sencillo ejemplo ilustra cómo el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones a través de la interacción con objetos. Por tanto, las matemáticas tienen más que ver con la construcción que con la deducción en términos de su desarrollo y adquisición (English y Sriraman, 2010). Si separamos el conocimiento matemático de sus orígenes constructivos, corremos el riesgo de reducirlo al formalismo puro, perdiendo su potencial como herramienta de representación, explicación y predicción.

A lo largo de su desarrollo histórico, las matemáticas han revelado una característica adicional: su capacidad para proporcionarnos una perspectiva dual de la realidad. Por un lado, las matemáticas se consideran una "ciencia exacta" donde los resultados de las operaciones y transformaciones son inequívocos. Sin embargo, cuando comparamos modelos matemáticos con situaciones del mundo real, siempre son aproximados debido a su incapacidad para representar perfectamente la realidad.

Si bien algunos aspectos de esta dualidad pueden resultar evidentes en los primeros encuentros de los estudiantes con las matemáticas, otros pueden volverse evidentes más adelante. Desafortunadamente, muchos planes de estudio educativos tienden a priorizar una cara de esta moneda, favoreciendo la visión tradicional de las matemáticas como una ciencia exacta. Esto significa que conceptos como certeza ("sí" o "no", "verdadero" o "falso") a menudo se enfatizan sobre probabilidad ("es posible que...", "con un nivel de significancia de...") y la precisión ("la diagonal mide 2", "el área de un círculo es πr^2") se prioriza sobre la estimación ("Me equivoco en una décima como máximo", "la proporción áurea es aproximadamente 5/3"). Es crucial que la educación matemática adopte ambos enfoques, no sólo porque proporcionan una riqueza de valor intrínseco, sino también porque el lado descuidado de la perspectiva dual tiene implicaciones significativas para las aplicaciones prácticas de las matemáticas en el mundo actual.

Capítulo 4

Perspectiva de la matemática realista en la educación infantil

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas se ha centrado principalmente en la memorización para que los estudiantes resuelvan ejercicios y aprueben exámenes. Desafortunadamente, este enfoque ha llevado a una falta de transferibilidad del conocimiento matemático a situaciones de la vida real, lo que ha dejado a muchas personas luchando por aplicar lo que aprendieron en la escuela a escenarios cotidianos donde la comprensión matemática es crucial.

Las consecuencias de este modelo de enseñanza son evidentes en las evaluaciones internacionales del desempeño matemático. Por ejemplo, en el estudio TIMMS 2015, los alumnos españoles de 4º de Educación Primaria obtuvieron 505 puntos, mientras que la media de la OCDE fue de 525 puntos. Del mismo modo, en el estudio PISA 2015 los resultados españoles se situaron 4 puntos por debajo de la media de la OCDE (490 puntos), según datos del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016a, 2016b).

Se cree que el bajo rendimiento matemático de los alumnos de Educación Primaria y Secundaria puede atribuirse en parte a la forma en que se enseñan las matemáticas en Educación Infantil. En muchos casos, el enfoque predominante para la enseñanza de matemáticas a una edad temprana todavía gira en torno a la memorización de habilidades básicas mediante la repetición. En menor medida también se utiliza el enfoque conceptual, que enfatiza procedimientos de aprendizaje con comprensión a través de la manipulación y experimentación con materiales.

Si bien este enfoque puede presentar ocasionalmente actividades sin un contexto o propósito claro, existe un esfuerzo por promover el aprendizaje significativo. Sin embargo, muchas veces este aprendizaje no llega a materializarse por una inadecuada gestión por parte del profesorado. Además de estos enfoques, las directrices curriculares actuales sugieren que para un proceso eficaz de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente a una edad temprana, es crucial extraer conocimientos de las propias experiencias y considerar los contextos de la vida diaria.

En este sentido, los lineamientos curriculares actuales señalan que el objetivo es involucrar a los niños en el proceso de descubrimiento y representación de los diversos contextos que componen su entorno, facilitando en última instancia su integración y participación en ellos (Bressan et al., 2016). En el ámbito de la educación matemática, esta perspectiva se alinea estrechamente con los principios de la Educación Matemática Realista (EMR) desarrollados por Freudenthal. La EMR aboga por el aprendizaje de matemáticas participando activamente en contextos reales o realistas, como situaciones de la vida cotidiana, que resuenan con las experiencias y la comprensión de los estudiantes.

La educación matemática realista, se basa en la creencia de que las matemáticas deben tener valor práctico, ser identificables con los niños y relevantes para la sociedad. Según Freudenthal, aunque no todos los niños llegan a ser matemáticos, todos los adultos utilizan las matemáticas para resolver problemas cotidianos.

En línea con estos principios, varios autores han descrito la EMR basándose en las siguientes ideas:

- Actividad: Las matemáticas son una actividad humana y su objetivo principal es organizar el mundo que nos rodea a través de conceptos matemáticos.
- Realidad: Las matemáticas se aprenden mejor en contextos reales o realistas.
- Niveles: Comprender las matemáticas implica avanzar a través de diferentes niveles, incluido el nivel situacional (comprensión dentro de una situación específica), el nivel referencial (uso de modelos y descripciones), el nivel general (exploración, reflexión y generalización) y el nivel formal. (usando procedimientos y notación estándar).
- Reinvención guiada: El conocimiento matemático formal se desarrolla a través de la guía y mediación del docente.
- Interacción: La enseñanza de matemáticas se considera una actividad social, donde la interacción entre estudiantes y entre estudiantes y profesores puede mejorar la comprensión.
- Interconexión: Los diferentes temas matemáticos no deben enseñarse de forma aislada sino más bien integrados.

Los niños deben aprender matemáticas en contextos reales y significativos, que les permitan desarrollar conceptos y aplicar reglas. Este enfoque enfatiza la necesidad de transferir problemas de la vida cotidiana al ámbito de las matemáticas, resolverlos y luego transferir las soluciones nuevamente al mundo real, familiarizando así a los estudiantes con el mundo matemático.

La medida

A partir del proceso de comparación, y utilizando un objeto o el propio cuerpo como unidad de medida, se puede comenzar a cuantificar una determinada medida. Esto implica el uso de unidades antropométricas, familiares y, eventualmente, convencionales. La estimación también es un aspecto clave del proceso de cuantificación. Contrariamente a la creencia popular, la estimación no es simplemente una conjetura. Implica realizar juicios de valor y aproximaciones basadas en información o experiencia previa. Requiere operaciones mentales y el uso de números rápidos y sencillos.

Es posible que una estimación no proporcione un valor exacto, pero permite la toma de decisiones y las personas pueden interpretarla de manera diferente. Según Alsina (2006), el proceso de aprendizaje sobre magnitudes con comprensión se puede dividir en tres fases:

- La primera fase implica prepararse para la medición, durante la cual los estudiantes identifican magnitudes a través de actividades que involucran comparaciones usando cuantificadores como "más que", "menor que" e "igual a".
- La segunda fase es la cuantificación de la medida, donde se introducen las unidades. Inicialmente, los niños utilizan unidades relacionadas con su propio cuerpo, como palmos y pasos, antes de pasar a unidades convencionales del sistema métrico decimal, como metros, gramos y litros.

- La fase final es el sistema de medición decimal, que normalmente no se aborda en la educación infantil. En esta fase se introducen múltiplos y submúltiplos de unidades de referencia para diferentes magnitudes.

La medición es una rama de las matemáticas que abarca el conocimiento y las actividades relacionadas con magnitudes continuas y atributos mensurables que se encuentran comúnmente en la vida cotidiana, como longitud, superficie, volumen, capacidad, masa y tiempo. Está estrechamente relacionado con la geometría, ya que implica comprender el espacio, así como los números y las operaciones, ya que las medidas se expresan mediante valores numéricos. Asimismo, la medición está fuertemente vinculada a nuestra comprensión del mundo natural.

Clements y Sarrama (2014) proponen trayectorias de aprendizaje para la medición en la primera infancia que ayudan a definir qué conceptos matemáticos pueden comprender los niños, cómo los entienden y cómo los adultos pueden ayudar a comprenderlos. Estas trayectorias describen la progresión del desarrollo y la edad en la que normalmente se adquieren las ideas. Por ejemplo, los niños pueden reconocer longitudes a la edad de 3 años, realizar comparaciones directas e indirectas de longitudes a los 4 años, ordenar longitudes secuencialmente a los 5 años y, finalmente, medir longitudes a los 6 años.

Existen progresiones similares para el área, el volumen y los ángulos. Curiosamente, a menudo se supone erróneamente que la adquisición de conocimientos sobre medición ocurre fuera de la escuela, ya que con frecuencia se delega al entorno familiar y social. Sin embargo, en la realidad, este aprendizaje muchas veces no se produce. Desafortunadamente, la medición suele introducirse y enseñarse algorítmicamente en etapas posteriores de la educación primaria, centrándose en las transformaciones de unidades y perdiendo el verdadero significado y trascendencia de la medición.

Por ello, es de suma importancia incorporar la instrucción sistemática en medición desde edades tempranas, incentivando a los estudiantes a interpretar e interactuar con su entorno y situaciones de la vida real. Esto incluye observar, comparar y evaluar resultados para darle al conocimiento de la medición verdadera importancia y significado. Además de estas ideas, también es valioso considerar directrices curriculares internacionales, como las proporcionadas por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, la Iniciativa de Estándares Estatales Básicos Comunes y las políticas curriculares actuales de directrices en España, para lograr una comprensión integral de los conceptos de medición en educación infantil (Hurford, 2010).

Según Alsina, se prioriza por encima de todo la exploración física de los atributos de los objetos. Esto incluye actividades tales como discriminar entre diferentes atributos de objetos y materiales, identificar cualidades, etc. Estas actividades ayudan a los niños de 3 a 6 años a desarrollar una comprensión de los atributos en general, en particular los atributos mensurables. Esta comprensión se logra principalmente a través de experiencias directas al comparar objetos, contar unidades y establecer conexiones entre conceptos espaciales y números.

Sin embargo, estos contenidos se centran principalmente en las relaciones cualitativas entre objetos y no abordan explícitamente las magnitudes. Desarrollar el interés y la curiosidad por los instrumentos de medida". En términos generales, los lineamientos curriculares abarcan los principales aspectos que se deben considerar al momento de enseñar medición a niños pequeños. Sin embargo, ponen relativamente poco énfasis en el proceso de medición en sí, que es esencialmente el mismo para cualquier atributo mensurable: seleccionar una unidad, compararla con el objeto y registrar el número de unidades. En relación al examen de estos contenidos, Alsina asevera que es crucial reconocer los atributos medibles que los niños pequeños son capaces de comprender a temprana edad. Estos atributos incluyen longitud, volumen, peso, área y tiempo. Es importante involucrar a los niños en diversas actividades de comparación, presentarles el concepto de cuantificación en la medición y exponerlos gradualmente a diferentes tipos de unidades, comenzando con unidades antropomórficas y luego progresando a unidades convencionales. Además, es fundamental fomentar la práctica de la medición mediante técnicas de medición tanto directas como indirectas, utilizando instrumentos adecuados.

El Espacio Europeo de Educación Superior ha establecido un sistema que tiene como objetivo mejorar la calidad de las universidades en Europa. En este sistema, los estudiantes son el punto focal y asumen la responsabilidad de su propio aprendizaje. Construyen activamente conocimientos conectando nuevas ideas con las existentes, mientras el profesor actúa como facilitador.

Este cambio en el enfoque de la enseñanza y el aprendizaje en las universidades no es simplemente el resultado de discusiones entre ministros sobre qué deben aprender los estudiantes y cómo, sino que tiene sus raíces en la investigación educativa, incluida la investigación en educación matemática. Un modelo específico que ha surgido de la investigación en educación matemática es el aprendizaje realista.

El modelo, basado en la Educación Matemática Realista (EMR), pretende proporcionar una experiencia de formación activa y práctica. Los fundamentos teóricos del aprendizaje realista se establecieron a través del Proyecto Comenius 2003-2005, dirigido por el profesor Ko Melief de la Universidad de Utrecht. A partir de este proyecto, Esteve, Melief y Alsina (2009) coordinaron un libro que no sólo describe los fundamentos teóricos del aprendizaje realista, sino que también proporciona instrumentos y técnicas prácticas para implementarlo en las aulas universitarias. El libro también incluye relatos de experiencias de formación docente en diversos campos, incluida la educación matemática. La investigación en educación matemática, como el trabajo de Kilpatrick (1992), ha desempeñado un papel importante en la configuración de este nuevo enfoque. La educación matemática a menudo se considera importante en el currículo escolar debido a su relativa independencia de influencias externas, su naturaleza jerárquica y acumulativa, sus conceptos abstractos y arbitrarios y el rango de complejidad que ofrece en las tareas de aprendizaje.

Esta teoría, no pretende ser una teoría integral del aprendizaje como el constructivismo. Fue desarrollado en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrecht, que ahora se llama Instituto Freudenthal. En esencia, las características más significativas de EMR se pueden resumir de la siguiente manera: utiliza situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. Las situaciones se matematizan gradualmente mediante el uso de modelos, que actúan como mediadores entre lo abstracto y lo concreto, formando en última instancia estructuras más formales y abstractas (Gravemeijer y Terwel, 2000).

Así, la EMR enfatiza la interacción en el aula, tanto entre estudiantes como entre profesor y estudiantes. Esta intensa interacción permite a los profesores incorporar las producciones de los estudiantes en su enseñanza. Otra idea clave de la EMR es brindar a los estudiantes la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto, en lugar de simplemente presentarles conceptos matemáticos preconstruidos.

Durante su etapa inicial, la EMR, se caracterizó por el uso de contextos para cerrar la brecha entre conceptos concretos y abstractos, el uso de modelos para facilitar el progreso y la incorporación de construcciones y conceptos libres de los estudiantes, en el proceso de enseñanza y aprendizaje. También se entrelazaron los diversos ejes del currículo de matemáticas. La EMR inicialmente consistía en ideas básicas centradas en el cómo y el qué de la enseñanza de las matemáticas. Con el tiempo, estas ideas se acumularon y revisaron, lo que llevó a la formación de EMR tal como lo conocemos hoy.

El libro "Aprendizaje realista en la formación inicial docente" de Esteve, Melief y Alsina, propone que los docentes en formación deben ser expuestos a diversas formas de actuar y practicarlas activamente. Deberían desarrollar criterios para determinar cuándo, qué y por qué determinadas acciones son apropiadas, y deberían participar en una reflexión sistemática. Según esta perspectiva, las experiencias y la práctica sirven como base para el aprendizaje profesional y son esenciales para que los profesores en formación alineen la teoría, la práctica en el aula y sus propias características personales.

El primer principio enfatiza la importancia de comenzar con experiencias reales en el aula y problemas que enfrentan los docentes en formación. En lugar de introducir conceptos teóricos de los libros de texto, la capacitación comienza involucrando activamente a los docentes en formación en situaciones específicas del aula y animándolos a reflexionar sobre sus pensamientos, sentimientos, necesidades e intereses. Este enfoque inductivo tiene como objetivo establecer una conexión entre estas experiencias y los futuros roles profesionales de los profesores en formación (Parra, 2013).

El segundo principio se centra en promover la reflexión sistemática. Sugiere que aprender de las experiencias es un proceso natural, pero debe ser guiado intencionalmente. Aquí se identifican cinco fases en este proceso reflexivo: acción o experiencia, mirar hacia atrás a la acción, tomar conciencia de aspectos importantes del propio desempeño, buscar comportamientos alternativos y probar su efectividad en nuevas situaciones. Cada ciclo de reflexión comienza con una nueva experiencia y contribuye al crecimiento profesional.

El tercer principio destaca la naturaleza social e interactiva del aprendizaje. Las discusiones en grupo y las interacciones entre los profesores en formación son cruciales para promover la reflexión. Al compartir sus experiencias, se anima a los profesores en formación a estructurar sus pensamientos, explorar diferentes perspectivas y recibir comentarios de sus compañeros. Estas interacciones reflexivas profundizan el propósito intencional del aprendizaje profesional y contribuyen a la reflexión y construcción colectiva.

El cuarto principio distingue tres niveles de aprendizaje en la formación docente: representación, esquema y teoría. En el nivel de representación, los profesores en formación reaccionan espontáneamente en función de sus necesidades, valores, opiniones, sentimientos y tendencias inconscientes. A nivel de esquema, la reflexión ocurre durante o después de una situación, lo que lleva al desarrollo de conceptos, características y principios para describir la práctica. El nivel teórico implica construir un orden lógico y analizar relaciones conceptuales dentro de un esquema individual o conectar múltiples esquemas para formar una teoría coherente. El aprendizaje realista en la formación docente implica la co-construcción del conocimiento incorporando los conocimientos y experiencias existentes de los docentes en formación con nuevos conocimientos y habilidades proporcionados por docentes, colegas y otros recursos. Promueve la reflexión sistemática, la interacción social y el desarrollo de una identidad personal y profesional.

El quinto principio enfatiza la importancia de considerar a los docentes en formación como individuos con identidad propia. La autonomía y el desarrollo profesional autorregulado son cruciales para su crecimiento. Desarrollar la autoconciencia y fomentar el interés por la propia identidad es fundamental para que los profesores en formación desarrollen su potencial y lo transfieran a los demás. Esta perspectiva destaca la necesidad de integrar una base moral en la formación ayudando a los profesores en formación a desarrollar su propia identidad.

El desarrollo de habilidades profesionales va más allá de la simple exhibición de conocimientos y habilidades. Un profesional competente también reconoce la importancia de alinear sus acciones con sus conocimientos, habilidades, motivaciones y valores. Abordan la resolución de problemas con flexibilidad, dedicación y perseverancia. Por tanto, la adquisición de la competencia reflexiva durante la formación inicial del profesorado es de suma importancia. Los alumnos deben cultivar una comprensión profunda de la necesidad y el compromiso de actuar de acuerdo con su experiencia profesional para abordar de manera efectiva los desafíos que surjan en su práctica futura.

Tanto la reflexión individual como grupal son cruciales en el proceso de formación de nuevos docentes. En lugar de prescribir soluciones, el apoyo colaborativo tiene como objetivo ayudar a los docentes en formación a navegar su propio viaje de aprendizaje. Esto implica alentarlos a expresar sus inquietudes y necesidades, escuchar sus perspectivas, aprovechar sus conocimientos existentes y brindarles orientación y asesoramiento. Este tipo de apoyo también garantiza una transferencia gradual del control sobre el proceso de aprendizaje a los propios alumnos.

La colaboración entre iguales ha sido reconocida como una herramienta poderosa para mejorar y desarrollar procesos cognitivos superiores en el aprendizaje. Recientemente, ha habido un interés creciente en los enfoques vygotskianos que se centran en el andamiaje colectivo, que implica la co-construcción de conocimiento entre profesores a partir de las contribuciones de cada miembro a través de interacciones dentro de un grupo de estudiantes o profesores novatos. Este trabajo colaborativo, cuando está bien guiado y apoyado, facilita los procesos de reflexión a medida que cada alumno, incluidos los docentes en formación, verbaliza sus pensamientos e ideas internos sobre el mundo y su entorno.

La autorregulación es otro aspecto importante de la formación docente. Los alumnos deben aprender a reflexionar sobre sus propias acciones, confrontar sus propias realidades e identificar y resolver sus propios problemas. Al participar en una reflexión continua sobre su trabajo diario, desarrollan la capacidad de identificar de forma independiente áreas de mejora y encontrar soluciones. Esta dimensión de autorregulación es crucial para fomentar el aprendizaje autónomo y se basa en la observación, el análisis crítico y la autoevaluación. Para ayudar a los alumnos a alcanzar este nivel de autonomía, deben estar equipados con herramientas adecuadas, como portafolios y pautas metacognitivas.

Conclusión

En su obra, Freudenthal introduce el término "fenomenología" para describir su método de análisis de conceptos matemáticos. Este método implica analizar los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos, considerando su desarrollo y uso actual. Freudenthal distingue varios tipos de fenomenología, como la fenomenología pura, didáctica, genética e histórica, cada una centrada en diferentes aspectos del concepto estudiado. Es crucial realizar un sólido análisis de la fenomenología pura para respaldar cualquier análisis fenomenológico eficaz en la enseñanza de las matemáticas.

Los conceptos matemáticos son medios para organizar los fenómenos del mundo físico y cotidiano, y se crean a través de la relación entre los fenómenos y los medios de organización descritos por los sistemas matemáticos de signos. Estos signos matemáticos son parte de un sistema matemático de signos que contiene expresiones diversas y crean conceptos abstractos a medida que los medios de organización se vuelven más abstractos. Los objetos matemáticos se incorporan a nuestro mundo experiencial, convirtiéndose en fenómenos en una nueva relación con otros fenómenos y medios de organización.

Por lo tanto, las matemáticas existen dentro del mismo mundo que los fenómenos que organizan, y no en un mundo separado. Los conceptos matemáticos no existen como objetos ideales preexistentes, sino que se crean a través de la actividad matemática y los sistemas matemáticos de signos. Por último, los conceptos matemáticos están sujetos a modificaciones con el tiempo debido a su uso y a los nuevos sistemas matemáticos de signos en los que se describen, pero estas modificaciones no indican errores en los conceptos originales ni una progresión lineal hacia una verdad única.

La resolución de problemas no es la única actividad matemática que crea conceptos. Organizar los resultados obtenidos al resolver problemas y demostrar teoremas en un sistema deductivo es otro aspecto importante de las matemáticas. Esta organización sistemática puede adoptar muchas formas: de local a global, de axiomática a formalizada. Sin embargo, es un elemento fundamental de las matemáticas porque los matemáticos han pasado de recopilar resultados y métodos a desarrollar estructuras complejas. Durante este proceso también se desarrolló el uso de definiciones en matemáticas. En matemáticas, las definiciones no sólo se utilizan para explicar a las personas el significado de los términos, sino que también son un eslabón en la cadena de inferencia en la organización del sistema de inferencia.

El proceso de definición implica organizar las propiedades de un objeto matemático mediante inferencia. La atención se centra en identificar propiedades que puedan utilizarse para crear un sistema deductivo, tanto a escala local como global, en el que se pueda incrustar un objeto matemático. Es importante señalar que aislar propiedades específicas para definir un concepto no es una acción neutral o inofensiva. En conclusión, esto sugiere que los conceptos fueron creados originalmente para organizar fenómenos relacionados y, significa que el contenido del concepto ahora está determinado por las conclusiones extraídas dentro del sistema definido, al igual que la demostración de teoremas, el proceso de definición también conduce a la formación de nuevos conceptos.

Bibliografía

Alsina, A. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, A. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.* En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119- 127). Santander: SEIEM.

Beltrán, P. (1996). La matemática de Lakatos: el papel de la prueba en metodología. *Themata Revista de filosofía*, 305-2020. https://institucional.us.es/revistas/themata/17/15%20Beltran.pdf

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. *Educación*, *63*, 1-11.

Burkhardt, H. (1988). The roles of theory in a 'sistems' approach to mathematical education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 174-177.

Chakravorty, G. (2010). *Crítica de la razón pos colonial: Hacia una historia del presente evanescente.* Madrid: Ediciones Akal

Clements y Sarrama. (2014). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for Young children.* New York: Routledge.

English, L. (2008). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.). London: Routledge, Taylor & Francis.

English, L. y Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. En B. Sriraman y L. English (Eds), *Theories of Mathematics Education* (pp. 263-289). Heidelberg: Springer-Verlag.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education. Doctoral dissertation, Utrecht University.* Utrecht: Cd Beta Press.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer and E. C. D. M. van Lieshout (eds), *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures.* Utrecht: Cd Beta Press), 13-34.

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 777-796.

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 1*(2), 3-7.

Hurford, A. (2010). Complexity theories and theories of learning: Literature reviews and synteses. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education.* Seeing new frontiers. (pp. 567-589).

Keitel, C. (1987). What are the goalsof mathematics for all? *Journal of Curriculum Studies, 19*(5), 393-407.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. *Proc. 11th Conference PME*. Montreal, p. 3-23.

Mosterín, J. (1987). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.

Navarro, B. (1971). Reflexiones sobre la aporía realismo-idealismo. *Dianoia,* 17 (17), 141-169.

Parra S., H. (2013). Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente. *Omnia, 19*(3), 74-85.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (págs. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE.

Sepúlveda Delgado, O. (2018). La fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas, de, Hans Freudenthal "Aportes de la Fenomenología a la Didáctica de la Matemática". In *Congreso de Investigación y Pedagogía III Nacional II Internacional*.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A. (1987). *Didactical background on a mathematics program for primary education.* Dordrecht: Reidel.

Trujillo, L. (2017). *Teorías pedagógicas contemporáneas.* Bogotá: Fundación Universitaria del Área Andina.

Vergnaud, G. (1988). Why is psychology essential? Under which conditions?. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Fondations and Methodology of* *the discipline Mathematics Education*. Procceding 2nd TME- Conference. Bielefeld - Antwerp.

Zolkower, B., & Bressan, A. (2012). Educación matemática realista. *Educación Matemática. Aportes a la Formación Docente desde Distintos Enfoques Teóricos (Pochulu M. & Rodrıguez M. eds). Argentina: UNGS–EDUVIM*, 175-200.

EST. 2021
EMC
EDITORIAL MAR CARIBE

De esta edición de "*Hans Freudenthal: Perspectivas en educación de las matemáticas y análisis fenomenológico*", se terminó de editar en la ciudad de Colonia del Sacramento en Agosto de 2024

EST. 2021 EMC
EDITORIAL MAR CARIBE

HANS FREUDENTHAL:
PERSPECTIVAS EN EDUCACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS Y ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

COLONIA, URUGUAY
2024

ISBN: 978-9915-9706-1-5