

# EDITORIAL MAR CARIBE

NELVER JAVIER ESCALANTE ESPINOZA - EBERARDO ANTONIO OSORIO ROJAS - SERAPIO AGAPITO QUILLOS RUIZ - HIPOLITO TUME RAMIREZ - EDGAR GUSTAVO SPARROW ALAMO - ATILIO RUBÉN LÓPEZ CARRANZA - LUIS CARLOS CALDERÓN RODRÍGUEZ



---

# ANÁLISIS ESTRUCTURAL ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

ISBN: 978-9915-698-61-8

A standard linear barcode representing the ISBN 978-9915-698-61-8.

9 789915 698618

## Análisis estructural estáticamente determinadas

*Escalante Espinoza, Nelver Javier; Osorio Rojas, Eberardo Antonio; Quillos Ruiz, Serapio Agapito; Tume Ramirez, Hipolito; Sparrow Alamo, Edgar Gustavo; López Carranza, Atilio Rubén; Calderón Rodríguez, Luis Carlos*

© Escalante Espinoza, Nelver Javier; Osorio Rojas, Eberardo Antonio; Quillos Ruiz, Serapio Agapito; Tume Ramirez, Hipolito; Sparrow Alamo, Edgar Gustavo; López Carranza, Atilio Rubén; Calderón Rodríguez, Luis Carlos, 2026

Primera edición (1.<sup>a</sup> ed.): enero, 2026

Editado por:

**Editorial Mar Caribe ®**

[www.editorialmarcaribe.es](http://www.editorialmarcaribe.es)

Av. Gral. Flores 547, 70000 Col. del Sacramento, Departamento de Colonia, Uruguay.

Diseño de carátula e ilustraciones: *Luisa Fernanda Lugo Rojas*

Libro electrónico disponible en:

<https://editorialmarcaribe.es/ark:/10951/isbn.9789915698618>

Formato: Electrónico

ISBN: 978-9915-698-61-8

ARK: [ark:/10951/isbn.9789915698618](http://ark:/10951/isbn.9789915698618)

[Editorial Mar Caribe \(OASPA\)](#): Como miembro de la Open Access Scholarly Publishing Association, apoyamos el acceso abierto de acuerdo con el código de conducta, transparencia y mejores prácticas de OASPA para la publicación de libros académicos y de investigación. Estamos comprometidos con los más altos estándares editoriales en ética y deontología, bajo la premisa de «Ciencia Abierta en América Latina y el Caribe»



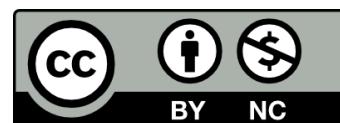
Editorial Mar Caribe, firmante Nº 795 de 12.08.2024 de la [Declaración de Berlín](#)

“... Nos sentimos obligados a abordar los retos de Internet como medio funcional emergente para la distribución del conocimiento. Obviamente, estos avances pueden modificar significativamente la naturaleza de la publicación científica, así como el actual sistema de garantía de calidad....” (Max Planck Society, ed. 2003, pp. 152-153).



[CC BY-NC 4.0](#)

Los autores pueden autorizar al público en general a reutilizar sus obras únicamente con fines no lucrativos, los lectores pueden utilizar una obra para generar otra, siempre que se dé crédito a la investigación, y conceden al editor el derecho a publicar primero su ensayo bajo los términos de la licencia CC BY-NC 4.0.



Editorial Mar Caribe se adhiere a la “Recomendación relativa a la preservación del patrimonio documental, comprendido el patrimonio digital, y el acceso al mismo” de la UNESCO y a la Norma Internacional de referencia para un sistema abierto de información archivística ([OAIS-ISO 14721](#)). Este libro está preservado digitalmente por [ARAMEO.NET](#)



**Editorial Mar Caribe**

**Análisis estructural estáticamente determinadas**

**Colonia, Uruguay**

**2026**

# Índice

Prólogo .....	9
Introducción .....	10
Capítulo I.....	13
Tratado técnico sobre el análisis de estructuras estáticamente determinadas .....	13
Fundamentos mecánicos del equilibrio en sistemas isostáticos.....	14
La física de las restricciones y los tipos de apoyo.....	15
Criterios de determinación y estabilidad estructural .....	15
Formulación para marcos y pórticos planos .....	15
Determinación en armaduras o cerchas.....	16
Análisis detallado de vigas isostáticas y sistemas Gerber .....	17
Procedimiento analítico y relaciones diferenciales.....	17
Vigas Gerber: Sistemas de tramos articulados .....	18
Metodologías avanzadas para el análisis de armaduras .....	19
El método de los nudos: equilibrio puntual.....	19
El método de las secciones (Ritter): Eficiencia selectiva.....	20
Arcos de tres articulaciones: estructuras a compresión.....	20
El fenómeno del empuje horizontal .....	21
Teoría de las líneas de influencia en sistemas isostáticos .....	22
Propiedades y métodos de construcción .....	22
El marco normativo peruano y el análisis isostático .....	23
Norma E.020: Cargas y reducción de sobrecargas.....	23
Norma E.030: Diseño Sismorresistente en Lima (Zona 4) .....	24
Norma E.060 (Concreto) y E.090 (Acero) .....	25
Estabilidad cinemática y análisis de fallos en el diseño .....	26
Mecanismos de inestabilidad geométrica .....	26

Capítulo II .....	28
Estrategias y marcos de trabajo en la implementación de software para el análisis de estructuras estáticamente determinadas.....	28
Evolución y vigencia del análisis isostático en el entorno digital .....	28
Arquitectura algorítmica de los métodos tradicionales .....	30
Sistematización del Método de los Nudos.....	30
El Método de las Secciones y la generación de leyes de esfuerzos ....	31
Ecosistema de herramientas y plataformas de desarrollo .....	32
Líderes comerciales y capacidades MEF.....	32
Innovación en la nube y automatización mediante API .....	33
Bibliotecas de Python para ingeniería estructural .....	33
Arquitectura de software y patrones de diseño aplicados .....	34
El patrón Modelo-Vista-Controlador (MVC) y la Arquitectura en Capas.....	35
Patrones de comportamiento y procesamiento de datos .....	35
Calidad del código y mantenibilidad .....	36
Implementación de la Teoría de Euler-Bernoulli .....	36
Visualización y postprocesamiento en la ingeniería civil.....	37
Graficación de diagramas de esfuerzos con Matplotlib y Plotly .....	37
Renderizado 3D e integración con APIs de modelado .....	38
Automatización y optimización: el enfoque académico en Perú .....	38
Investigaciones en el repositorio de la UNI y PUCP .....	39
Automatización de la documentación técnica en proyectos estructurales .....	40
El papel del álgebra lineal en el motor de cálculo.....	40
Operaciones vectoriales y matriciales.....	41
Algoritmos de resolución: Eliminación Gaussiana y Pivoteo .....	41
Verificación, validación y mejores prácticas profesionales .....	42

Estrategias de Verificación y Validación (V&V) .....	42
Buenas prácticas en la creación de hojas de cálculo y scripts.....	42
El futuro: Inteligencia Artificial y Lenguaje Natural en FEA.....	43
FeaGPT y la interfaz conversacional para simulación .....	43
Visión artificial aplicada al análisis estructural .....	44
Capítulo III .....	46
Tratado integral de mecánica de estructuras: Evolución, teoría y aplicación de los métodos de análisis .....	46
Clasificación y principios fundamentales del análisis estructural .....	47
Análisis estático frente al análisis dinámico.....	47
Linealidad y no linealidad estructural.....	49
Métodos clásicos de análisis manual para estructuras hiperestáticas ...	50
El método de distribución de momentos de Hardy Cross .....	50
El método de pendiente-deflexión (Slope-Deflection) .....	51
Métodos de energía y teoremas de Castigliano.....	52
Análisis matricial de estructuras: el método de la rigidez.....	53
Concepto de rigidez y construcción de matrices locales.....	53
Transformación de coordenadas y ensamblaje global .....	54
Aplicación de condiciones de contorno y resolución .....	54
El método de los elementos finitos (MEF) en la ingeniería estructural .	55
Discretización y funciones de forma .....	55
Tipologías de elementos y aplicaciones prácticas .....	56
Análisis sismorresistente según la normativa técnica peruana (E.030) .	57
Parámetros de peligro sísmico y sitio .....	57
Análisis estático frente al análisis dinámico modal .....	58
Criterios de regularidad y control de derivas .....	58
Software de ingeniería estructural y algoritmos de cálculo.....	59

Ecosistema de software de CSI: SAP2000 y ETABS .....	59
Algoritmos para el análisis dinámico: Eigen y Ritz .....	60
Síntesis de la práctica del análisis estructural moderno .....	60
Capítulo IV .....	62
Análisis Integral de las Estructuras Articuladas Isostáticas: Teoría, Métodos de Cálculo y Aplicaciones en la Ingeniería Estructural .....	62
Fundamentos Físicos y Mecánicos de las Estructuras Articuladas .....	63
Hipótesis de Diseño y Simplificaciones Estructurales .....	63
El Concepto de Isostaticidad y Equilibrio Estático .....	64
Análisis de Estabilidad y Determinación Estática .....	65
Isostaticidad Exterior.....	65
Isostaticidad Interior y Grado de Hiperestaticidad .....	66
Metodologías Analíticas de Resolución .....	67
El Método de los Nudos .....	67
El Método de las Secciones o de Ritter .....	68
El método de Henneberg para estructuras complejas .....	68
Tipologías de Armaduras de Puentes: Evolución y Eficiencia.....	69
Armaduras Pratt y Howe: La Dualidad Tensión-Compresión .....	69
Armadura Warren: Simplicidad y Versatilidad.....	70
Armaduras para Grandes Luces: Baltimore, K y Parker.....	70
Estructuras Articuladas en Edificación y Techumbres .....	71
Armadura Fink: El Estándar de las Cubiertas.....	71
Otras Configuraciones de Techo .....	71
Comparativa Técnica: Sistemas Isostáticos frente a Hiperestáticos .....	72
Respuesta ante Variaciones Térmicas y Asentamientos.....	72
Redundancia y Seguridad Estructural.....	73
Aplicaciones Especiales: Grúas y Maquinaria de Elevación.....	74

Grúas Torre y de Celosía .....	74
Grúas Pórtico para Construcción de Puentes.....	75
Perspectiva de Diseño: Del Cálculo Manual a la Era Digital .....	75
Capítulo V .....	77
Análisis técnico-científico de los principios de trabajo y energía en el diseño de estructuras isostáticas y su integración en la normativa peruana .....	77
Fundamentos termodinámicos y la ley de conservación de la energía estructural .....	77
El principio del trabajo virtual y el método de la carga unitaria .....	80
Pasos metodológicos para la aplicación en vigas y pórticos isostáticos .....	81
Teoremas de Castigliano: Derivación parcial de la energía .....	82
Propiedades de los materiales y rigidez estructural en el contexto peruano.....	84
Límites de deflexión y estados límite de servicio en el RNE .....	85
Límites en concreto armado (E.060) .....	86
Límites en estructuras metálicas (E.090).....	86
Reciprocidad de Maxwell-Betti y su importancia en la simetría estructural .....	87
Integración con el método de los elementos finitos y software moderno .....	88
Dinámica, sismo y disipación de energía .....	90
Aplicación práctica: Análisis de deflexión en una armadura Warren isostática.....	91
Consideraciones sobre cargas ambientales y térmicas .....	92
Capítulo VI .....	94
Teoría y Praxis del Método de Equilibrio y Rigidez en Estructuras Estáticamente Determinadas .....	94

Evolución Histórica y el Surgimiento del Paradigma Matricial.....	94
Fundamentos Mecánicos y Relaciones Constitutivas.....	96
El Principio de Equilibrio Estático.....	96
La Condición de Compatibilidad Cinemática.....	97
Leyes de comportamiento del material .....	97
Caracterización de la Rigidez y Grados de Libertad .....	98
Identificación de Grados de Libertad (GL).....	98
El Método de Rigidez en Estructuras Isostáticas.....	99
Transformación de Coordenadas Locales a Globales .....	99
Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global .....	100
El Principio de Contravarianza y la Dualidad Estática-Cinemática....	101
Procedimiento Detallado para Vigas y Armaduras Isostáticas .....	102
Análisis de un Arco Triarticulado .....	103
Factores que Afectan la Rigidez: Wilbur y Muto .....	103
Implementación Computacional y Uso de Software.....	104
Ftool y el Análisis Educativo.....	104
Software Profesional y BIM .....	105
El Análisis Estructural en la Academia Peruana: El Legado de la UNI y la PUCP.....	105
La contribución de Genaro Delgado Contreras.....	105
El Enfoque en la PUCP y la UPC.....	106
Análisis Dinámico y Matriz de Masa.....	106
Efectos Térmicos y Deformaciones Impuestas .....	107
El Futuro del Análisis Estructural: Algoritmos y Datos.....	107
Conclusión.....	109
Bibliografía .....	112

# Prólogo

El diseño de infraestructuras seguras y eficientes no comienza con complejos algoritmos computacionales, sino con la comprensión profunda de cómo las cargas viajan a través de la materia. En el aprendizaje de la ingeniería civil y mecánica, el estudio de las estructuras estáticamente determinadas representa el cimiento sobre el cual se construye toda la intuición física del profesional.

Este libro, *"Análisis estructural estáticamente determinadas"*, nace de la necesidad de ofrecer una hoja de ruta clara en un entorno técnico cada vez más dependiente del software. Si bien las herramientas digitales son indispensables en la práctica moderna, su uso sin un criterio sólido convierte al ingeniero en un simple operador. Esta obra invita al lector a volver a las raíces: el equilibrio, la geometría y la lógica.

¿Qué encontrará en estas páginas?: A lo largo de sus capítulos, el texto guía al estudiante y al profesional a través de un recorrido lógico que incluye:

- Los principios del equilibrio: Un repaso exhaustivo de las leyes de Newton aplicadas a sistemas rígidos.
- Sistemas de alma llena y reticulados: Metodologías precisas para el cálculo de reacciones y esfuerzos internos en vigas, marcos y armaduras.
- Líneas de influencia: Herramientas vitales para comprender el comportamiento de estructuras bajo cargas móviles.
- Cálculo de deflexiones: Una introducción a la energía y el trabajo como métodos para predecir la deformación estructural.

La ingeniería no es solo la aplicación de fórmulas, sino el arte de la simplificación responsable. A través de numerosos ejemplos resueltos y problemas propuestos, este libro enfatiza que una estructura isostática no es solo un caso idealizado, sino el punto de partida para comprender la redundancia y la estabilidad de los sistemas más complejos. Esperamos que este texto no solo sea un compañero de estudio en las aulas, sino una fuente de consulta constante que recuerde al lector que, antes de que existieran los superordenadores, la humanidad ya desafiaba la gravedad mediante el dominio de las ecuaciones de equilibrio.

Nelver Javier Escalante Espinoza

# Introducción

El diseño y la construcción de infraestructuras seguras y eficientes representan uno de los desafíos más antiguos y fundamentales de la ingeniería civil y arquitectónica. En el corazón de esta disciplina se encuentra el Análisis Estructural, un proceso riguroso que permite predecir cómo una configuración física resistirá las cargas impuestas por la naturaleza y la actividad humana.

Este libro, titulado "Análisis estructural estáticamente determinadas", se centra en el estudio de aquellos sistemas donde las fuerzas internas y las reacciones pueden obtenerse exclusivamente mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio de la estática. Aunque en la práctica moderna abundan las estructuras hiperestáticas, el dominio de los sistemas isostáticos es el paso ineludible para cualquier profesional en formación.

Las estructuras estáticamente determinadas, o isostáticas, poseen una propiedad única: su equilibrio interno no depende de las propiedades del material (como el módulo de Young) ni de las dimensiones de la sección transversal, sino estrictamente de su geometría y la disposición de sus apoyos. A lo largo de esta obra, se exploran los principios fundamentales que rigen el comportamiento de vigas, armaduras y marcos. Se profundiza en métodos clásicos que han resistido la prueba del tiempo, tales como:

- El método de los nudos y secciones para armaduras.
- Diagramas de fuerzas internas (cortante, momento y axial) para vigas y pórticos.

- El cálculo de deflexiones mediante métodos energéticos como el Trabajo Virtual.

El propósito central de esta obra es proporcionar un marco teórico y práctico exhaustivo que permita la comprensión y resolución de sistemas estructurales donde el equilibrio es la herramienta definitiva de análisis. El objetivo general es desarrollar un análisis integral de las estructuras estáticamente determinadas, estableciendo las bases conceptuales, los métodos de cálculo y las aplicaciones prácticas que permitan al lector evaluar la estabilidad y el comportamiento interno de diversos sistemas estructurales bajo diferentes condiciones de carga.

Este estudio es importante debido a la relevancia de la seguridad estructural en la ingeniería moderna. Además, en el contexto actual, donde predomina el uso de software de cálculo avanzado, aumenta el riesgo de que el ingeniero pierda la capacidad crítica para verificar los resultados. Las estructuras estáticamente determinadas representan la forma más pura de transferencia de cargas. Su estudio permite comprender cómo la geometría, y no solo el material, dicta la estabilidad de una obra.

Este análisis constituye el lenguaje básico de la ingeniería estructural. Sin el dominio de la isostaticidad, es imposible abordar con rigor sistemas complejos o hiperestáticos. Así, comprender el flujo de fuerzas internas permite proponer diseños preliminares más eficientes y económicos desde las etapas iniciales de un proyecto, reduciendo el margen de error y el desperdicio de materiales.

Se espera que los lectores definan con precisión las ecuaciones de la estática en el plano y en el espacio para determinar reacciones y fuerzas

internas, evaluar la eficiencia de las estructuras de barras articuladas mediante los métodos de nudos y secciones, comprendiendo cómo la geometría influye en la distribución de esfuerzos axiales e implementar el uso de líneas de influencia para determinar las posiciones de carga que generan los efectos más desfavorables en estructuras como puentes y pasarelas.

# Capítulo I

## Tratado técnico sobre el análisis de estructuras estáticamente determinadas

El análisis estructural representa la disciplina fundamental que permite comprender la interacción entre las fuerzas externas y la integridad física de los sistemas construidos. Dentro de este campo, las estructuras estáticamente determinadas, comúnmente denominadas isostáticas, constituyen el pilar fundamental tanto para el aprendizaje académico como para la práctica profesional rigurosa. Una estructura se define como estáticamente determinada cuando es posible resolver la totalidad de sus incógnitas mecánicas —reacciones en los apoyos y esfuerzos internos— mediante la aplicación exclusiva de las leyes del equilibrio estático. Este principio implica que el sistema posee exactamente la cantidad de vínculos necesarios para garantizar su estabilidad sin redundancias que compliquen el cálculo mediante métodos algebraicos lineales básicos.

La relevancia de los sistemas isostáticos trasciende la mera facilidad de cálculo. En la ingeniería civil, estas estructuras poseen propiedades mecánicas únicas, como la insensibilidad a los esfuerzos inducidos por cambios de temperatura o asentamientos diferenciales en los apoyos. Al no poseer restricciones redundantes, la estructura puede deformarse libremente ante variaciones térmicas o desplazamientos en su base sin generar tensiones internas adicionales, una característica que las diferencia drásticamente de los sistemas hiperestáticos o indeterminados.

## Fundamentos mecánicos del equilibrio en sistemas isostáticos

El comportamiento de cualquier sólido bajo cargas se rige por los principios de la mecánica racional. En un entorno bidimensional (2D), un cuerpo rígido dispone de tres grados de libertad: traslación en dos ejes ortogonales y rotación en el plano. Para que la estructura se encuentre en un estado de reposo absoluto, se deben satisfacer las tres ecuaciones fundamentales de la estática, que postulan que la resultante de fuerzas y de momentos debe ser nula en cualquier punto del sistema (Alvarado et al., 2012).

Analíticamente, estas condiciones se expresan mediante las ecuaciones generales de equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

En sistemas tridimensionales (3D), la complejidad se duplica, ya que el cuerpo posee seis grados de libertad. El análisis en este nivel requiere la resolución de seis ecuaciones de equilibrio simultáneas: tres para fuerzas en los ejes  $X, Y, Z$  y tres para los momentos respecto a dichos ejes. La transición del análisis 2D al 3D es fundamental para comprender estructuras complejas como los marcos espaciales o las armaduras de gran envergadura, donde la estabilidad depende de la restricción total de los desplazamientos y giros en el espacio tridimensional.

## La física de las restricciones y los tipos de apoyo

La interacción entre la estructura y su entorno se materializa a través de los apoyos. Estos dispositivos mecánicos tienen la función de restringir grados de libertad específicos, generando reacciones proporcionales a las cargas externas aplicadas. La correcta identificación de estas reacciones es el primer paso crítico en el proceso de análisis isostático.

El análisis de las reacciones no es meramente un ejercicio matemático; representa la transferencia de carga desde la superestructura hacia la subestructura y la cimentación. En el contexto de la ingeniería peruana, regulada por el Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE), el diseño de estos apoyos debe considerar no solo las cargas gravitatorias sino también las solicitudes dinámicas impuestas por la actividad sísmica.

## Criterios de determinación y estabilidad estructural

Para que una estructura sea clasificada como estáticamente determinada, el número de reacciones externas y de fuerzas internas desconocidas debe coincidir exactamente con el número de ecuaciones de equilibrio independientes que se pueden plantear (Janssen et al., 2024). Este concepto se cuantifica mediante el Grado de Indeterminación Estática (GIE). Si el GIE es igual a cero, la estructura es isostática; si es mayor que cero, es hiperestática; y si es menor que cero, es hipostática o inestable.

## Formulación para marcos y pórticos planos

En el análisis de pórticos planos, se utiliza una relación que vincula el número de barras ( $B$ ), el número de reacciones ( $R$ ) y el número de nudos

o juntas ( $J$ ). La expresión estándar para evaluar la determinación externa e interna combinada es:

$$GIE = (3 \cdot B + R) - (3 \cdot J + C)$$

Donde  $C$  representa las ecuaciones de condición proporcionadas por articulaciones internas o rótulas. Una estructura se considera isostática siempre que se cumpla la estabilidad cinemática. Es fundamental entender que la igualdad numérica no garantiza la estabilidad. Una estructura puede poseer tres reacciones (lo que sugeriría determinación para una viga plana), pero si las tres reacciones son paralelas o concurrentes en un mismo punto, el sistema se convierte en un mecanismo incapaz de resistir momentos o desplazamientos específicos, lo que resulta en una inestabilidad geométrica o en un vínculo aparente.

### Determinación en armaduras o cerchas

Las armaduras son sistemas de barras articuladas diseñados para trabajar exclusivamente bajo fuerzas axiales. El criterio de determinación en estos sistemas es distinto debido a que los nudos actúan como articulaciones perfectas donde no se transmiten momentos. Para una armadura plana con  $b$  barras,  $r$  reacciones y  $n$  nudos, la relación de determinación se establece mediante la fórmula:

$$b + r = 2 \cdot n$$

Si esta igualdad se cumple, la armadura es isostática. Si  $b + r > 2n$ , existen barras o reacciones redundantes que requieren métodos de compatibilidad de deformaciones (análisis hiperestático) para su resolución.<sup>10</sup> En el espacio tridimensional, cada nudo ofrece tres ecuaciones de equilibrio, por lo que la relación evoluciona a  $0,7b + r = 3 \cdot n$ . La geometría triangular es la base de la estabilidad en las armaduras, ya que el triángulo es la única figura geométrica articulada que es intrínsecamente rígida.

## Análisis detallado de vigas isostáticas y sistemas Gerber

Las vigas son elementos estructurales cuyo diseño está gobernado por la flexión y el corte. El análisis de una viga isostática requiere determinar las funciones de esfuerzos internos a lo largo de toda su longitud, lo cual se visualiza mediante los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.

### Procedimiento analítico y relaciones diferenciales

El análisis comienza invariablemente con el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL), donde se aíslan las cargas externas y se sustituyen los apoyos por sus reacciones equivalentes. Una vez halladas las reacciones mediante  $\sum F = 0$  y  $\sum M = 0$ , se procede a realizar cortes imaginarios en secciones arbitrarias para exponer las fuerzas internas. Las convenciones de signos son cruciales: una fuerza cortante es positiva si tiende a hacer girar el segmento de viga en sentido horario, y un momento flector es positivo si comprime las fibras superiores (cóncavo hacia arriba) (Moebs et al., 2021).

Existen relaciones matemáticas fundamentales que vinculan la carga distribuida ( $w$ ), la fuerza cortante ( $V$ ) y el momento flector ( $M$ ):

1. La derivada de la fuerza cortante respecto a la posición es igual al valor negativo de la intensidad de la carga distribuida  $\frac{dV}{dx} = -w$ .
2. La derivada del momento flector respecto a la posición es igual a la fuerza cortante  $\frac{dM}{dx} = V$ .

Estas leyes permiten deducir que en los puntos donde la fuerza cortante cruza por cero, el momento flector alcanza un valor máximo o mínimo local. Asimismo, el área bajo el diagrama de cortante entre dos puntos representa el cambio neto en el momento flector entre dichos puntos.

### Vigas Gerber: Sistemas de tramos articulados

Las vigas Gerber representan una solución ingeniosa para extender la aplicación de los principios isostáticos a vigas continuas de múltiples apoyos. Mediante la inserción de articulaciones internas (rótulas) en puntos estratégicos —generalmente donde el momento flector sería nulo de forma natural—, una viga hiperestática se transforma en un sistema de tramos isostáticos conectados (Alemán, 2024).

El análisis de una viga Gerber se realiza mediante un proceso de descomposición o despiece. Se identifican dos tipos de tramos:

- **Tramos SEP (Sin Equilibrio Propio):** Son aquellos que requieren los tramos adyacentes para mantenerse estables.
- **Tramos CEP (Con Equilibrio Propio):** Son tramos que pueden sostenerse por sí mismos y, además, sirven de apoyo a los tramos SEP.

El orden de cálculo es descendente: se resuelven primero las vigas apoyadas (SEP) y sus reacciones se transfieren como cargas puntuales invertidas a las vigas de soporte (CEP). Este método asegura que el sistema completo pueda ser analizado tramo por tramo utilizando únicamente la estática básica.

## Metodologías avanzadas para el análisis de armaduras

El cálculo de las fuerzas internas en las barras de una armadura isostática es fundamental para el diseño de puentes y techos industriales. Se utilizan principalmente dos enfoques analíticos: el método de los nudos y el método de las secciones, también llamado método de Ritter.

### El método de los nudos: equilibrio puntual

Este procedimiento se basa en el principio de que si una estructura está en equilibrio, cada uno de sus nudos también debe estarlo. Al tratar cada nudo como una partícula, se aplican las ecuaciones de equilibrio de fuerzas concurrentes (García et al., 2003).

- **Aplicabilidad:** Es el método ideal cuando se requiere conocer la fuerza en todas las barras de la armadura.
- **Limitación:** Solo se pueden resolver nudos con un máximo de dos incógnitas. Además, los errores de cálculo en los nudos iniciales se propagan sistemáticamente al resto de la estructura.
- **Procedimiento:** Se calculan primero las reacciones globales. Luego, se selecciona un nudo con dos o menos barras desconocidas, se establecen las ecuaciones  $\sum F_x = 0$  y se determinan las fuerzas axiales. Se asume la tracción como positiva; un resultado negativo indica compresión.

## El método de las secciones (Ritter): Eficiencia selectiva

El método de Ritter es una herramienta poderosa que permite determinar la fuerza en una barra específica sin necesidad de resolver toda la estructura. Se basa en el equilibrio de un cuerpo rígido obtenido tras realizar un corte imaginario a través de la armadura (Geoffrey, 2005).

- **Ventaja estratégica:** Al dividir la armadura en dos secciones, se exponen las fuerzas internas de las barras cortadas como fuerzas externas sobre la sección aislada. Al disponer de tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum F_x, \sum F_y, \sum M$ ), se pueden resolver hasta tres incógnitas simultáneamente.
- **Uso de la ecuación de momentos:** La técnica más eficiente consiste en tomar momentos respecto al punto de intersección de dos de las barras desconocidas, lo que permite despejar la tercera incógnita en una sola operación algebraica.
- **Limitación:** El corte no debe atravesar más de tres barras con fuerzas desconocidas, a menos que existan condiciones geométricas especiales (como barras paralelas).

## Arcos de tres articulaciones: estructuras a compresión

Los arcos son sistemas estructurales que transforman las cargas verticales en fuerzas de compresión axial predominantes, lo que permite cubrir luces mayores que las de las vigas convencionales. El arco de tres articulaciones es la configuración isostática por excelencia en esta tipología, consistente en dos segmentos unidos por una articulación en la corona y apoyados en dos articulaciones en la base.

## El fenómeno del empuje horizontal

La característica mecánica definitoria del arco es la generación de reacciones horizontales hacia afuera en los apoyos, conocidas como empuje horizontal ( $H$ ). Este empuje es el que "cierra" el arco y reduce drásticamente los momentos flectores en comparación con una viga de la misma luz (ver Tabla 1).

**Tabla 1: El fenómeno del empuje horizontal**

Componente de Reacción	Método de Obtención	Implicación Estructural
Reacciones Verticales ( $V_y$ )	Equilibrio global ( $\sum M_{apoyo} =$ )	Soportan la carga gravitatoria total
Empuje Horizontal ( $H_x$ )	Equilibrio de una mitad respecto a la corona ( $\sum M_{corona} =$ )	Reduce la flexión; requiere cimentaciones capaces de resistir empuje lateral

El momento flector en cualquier sección de un arco triarticulado se calcula como la diferencia entre el momento que existiría en una viga simple equivalente y el momento producido por el empuje horizontal multiplicado por la altura del arco en ese punto  $M = M_{viga} - H \cdot y$ . Este principio permite que, si la forma del arco (directriz) sigue la línea de presiones de las cargas, los momentos flectores sean nulos, lo que optimiza el uso del material.

## Teoría de las líneas de influencia en sistemas isostáticos

El diseño de infraestructuras sujetas a cargas móviles, como puentes vehiculares o vigas de grúas viajeras, requiere un análisis que vaya más allá de las cargas fijas. Las líneas de influencia (LI) proporcionan una representación gráfica de cómo cambia una respuesta estructural (reacción, cortante o momento) en un punto fijo a medida que una carga unitaria se desplaza a lo largo de la estructura (Cervera y Blanco, 2002).

### Propiedades y métodos de construcción

Para estructuras estáticamente determinadas, las líneas de influencia se caracterizan por ser siempre funciones lineales (tramos rectos). Su análisis permite identificar la "posición crítica" de la carga para maximizar un esfuerzo determinado.

Existen dos métodos principales para su determinación:

1. **Método Estático:** Se coloca una carga unitaria en una posición variable  $x$  y se derivan analíticamente las ecuaciones de equilibrio en función de dicha variable. Es un proceso riguroso pero laborioso para estructuras complejas.
2. **Principio de Müller-Breslau:** postula que la línea de influencia de una magnitud elástica es proporcional a la configuración deformada de la estructura cuando se elimina la restricción de dicha magnitud y se aplica un desplazamiento unitario. En sistemas isostáticos, este desplazamiento genera movimientos de cuerpo rígido sin deformación elástica, lo que explica por qué las LI son líneas rectas.

La aplicación práctica de las LI es fundamental en el diseño de puentes. Por ejemplo, para calcular la reacción máxima en un apoyo debido a un tren de cargas (como el camión de diseño), se multiplican las magnitudes de las cargas por las ordenadas correspondientes de la línea de influencia y se suman los efectos. Si la carga es distribuida, el efecto se calcula multiplicando la intensidad de la carga por el área bajo la línea de influencia en la longitud donde actúa la carga.

## El marco normativo peruano y el análisis isostático

En el Perú, el ejercicio de la ingeniería estructural está supeditado al cumplimiento del Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE). Aunque la mayoría de los edificios modernos son hiperestáticos, el análisis isostático es la base para el diseño de componentes secundarios, puentes y naves industriales.

### Norma E.020: Cargas y reducción de sobrecargas

La Norma E.020 establece los requisitos para las cargas muertas (peso propio) y vivas (uso). Un aspecto técnico avanzado de esta norma es la regulación de la reducción de la carga viva para elementos que soportan grandes áreas de influencia ( $A_i$ ). Esta reducción se basa en la baja probabilidad estadística de que toda la superficie de un edificio esté cargada a su máxima capacidad simultáneamente (ver Tabla 2).

**Tabla 2: Cargas y reducción de sobrecargas**

<b>Tipo de Miembro</b>	<b>Área de Influencia (Ai)</b>	<b>Restricción de Reducción</b>
Vigas Isostáticas	Las líneas de influencia para estructuras isostáticas están formadas por segmentos rectos	No reducible si la carga viva > kPa (500 kgf/m <sup>2</sup> )
Columnas y Muros	Suma de áreas de influencia por nivel	Mínimo 40% o 50% de la carga original según el caso

La aplicación de estas reducciones permite un diseño más económico y realista, evitando el sobredimensionamiento de los elementos estructurales críticos.

#### **Norma E.030: Diseño Sismorresistente en Lima (Zona 4)**

Dada la alta sismicidad del territorio peruano, la norma E.030 es el documento más crítico para el análisis estructural. Clasifica al país en cuatro zonas sísmicas. Lima se encuentra en la Zona 4, la de mayor peligro, con un factor de zona  $Z = 0.45$ , que representa la aceleración máxima esperada en roca.

Para estructuras regulares y de poca altura, la norma permite el uso del análisis estático o de fuerzas equivalentes. Este procedimiento asume que la estructura responde principalmente en su modo fundamental de vibración y simplifica el sismo como una serie de fuerzas horizontales

aplicadas en cada nivel (Rupay et al., 2022). El cortante basal ( $V$ ) se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{Z \cdot U \cdot C \cdot S}{R} \cdot P$$

Donde  $P$  representa el peso sísmico de la edificación (100% de carga muerta y un porcentaje de la carga viva, usualmente el 25% o el 50% según la categoría del edificio). La norma exige que, incluso en sistemas isostáticos, se garantice la redundancia estructural y la ductilidad, evitando sistemas que dependan de un solo elemento para su estabilidad lateral.

### Norma E.060 (Concreto) y E.090 (Acero)

El análisis de vigas de concreto armado bajo la E.060 requiere la verificación de los estados límite de servicio y de resistencia. Para Vielma et al. (2007), en vigas isostáticas, es vital asegurar que la falla sea dúctil (fluencia del acero antes del aplastamiento del concreto). La cuantía de acero ( $\rho$ ) debe situarse entre un mínimo normativo, para evitar fallas frágiles, y un máximo, para asegurar la ductilidad.

En estructuras metálicas (Norma E.090), el análisis de tijerales isostáticos debe considerar la esbeltez de las barras. Los elementos en compresión son susceptibles al pandeo global y local, por lo que se deben seguir los lineamientos de diseño por Esfuerzos Admisibles (ASD) o por Factores de Carga y Resistencia (LRFD), verificando que la carga crítica de Euler no sea excedida por las solicitudes de diseño.

## Estabilidad cinemática y análisis de fallos en el diseño

Un sistema puede ser estáticamente determinado desde el punto de vista numérico ( $GIE = 0$ ) y, sin embargo, ser inestable debido a una disposición incorrecta de sus vínculos. Este fenómeno se conoce como inestabilidad cinemática o vínculo aparente (Guardia, 2025).

### Mecanismos de inestabilidad geométrica

1. **Concurrencia de reacciones:** Si las líneas de acción de tres reacciones en un plano coinciden en un único punto, el sistema no puede resistir momentos respecto a ese punto, lo que permite una rotación infinita bajo cualquier carga no concurrente.
2. **Paralelismo de reacciones:** Si todas las fuerzas de reacción son paralelas, la estructura carece de restricción en la dirección perpendicular, lo que permite un desplazamiento traslacional sin oposición.
3. **Inestabilidad interna:** En armaduras, la disposición de las barras debe garantizar que el sistema sea indeformable. La falta de una diagonal en un panel cuadrado, aunque el número total de barras cumpla la ecuación  $b + r = 2n$ , genera un mecanismo de falla local.

El ingeniero debe realizar siempre una inspección cualitativa del sistema de soporte para asegurarse de que la estructura sea capaz de mantener su forma geométrica bajo cualquier conjunto de cargas externas.

Históricamente, el análisis de estructuras estáticamente determinadas se realizaba de forma manual, fomentando el desarrollo de la

intuición estructural. Sin embargo, en la práctica profesional contemporánea, el uso de software de cálculo es la norma.

Programas como SkyCiv, RFEM, Diamonds y Ftool permiten modelar estructuras isostáticas de forma rápida, proporcionando diagramas de esfuerzos, reacciones y deformaciones instantáneamente. Estos sistemas operan internamente mediante el método de la rigidez matricial, que es una generalización computacional de los principios de equilibrio y compatibilidad. A pesar de esta automatización, el conocimiento de los métodos clásicos descritos en este tratado sigue siendo imperativo para la validación de resultados y la toma de decisiones críticas durante la fase de concepción estructural, donde la simplicidad de un sistema isostático puede ofrecer soluciones elegantes y económicas a problemas de ingeniería complejos.

En síntesis, el análisis de estructuras estáticamente determinadas constituye el cimiento sobre el cual se edifica todo el conocimiento de la ingeniería estructural. Desde el equilibrio de una viga simple hasta la complejidad de un arco triarticulado o una armadura espacial, los principios de la estática proporcionan las herramientas necesarias para garantizar la seguridad de las edificaciones. En un país con la complejidad geológica y sísmica del Perú, la aplicación rigurosa de estos conceptos, en armonía con el Reglamento Nacional de Edificaciones, es la única garantía para el desarrollo de una infraestructura resiliente y duradera.

## Capítulo II

### Estrategias y marcos de trabajo en la implementación de software para el análisis de estructuras estáticamente determinadas

El análisis estructural ha experimentado una metamorfosis radical desde las metodologías puramente gráficas y manuales del siglo XIX hasta los ecosistemas computacionales hiperconectados de la actualidad. En el centro de esta evolución se encuentra la capacidad de traducir los principios inmutables de la estática en algoritmos eficientes y arquitecturas de software robustas. Las estructuras estáticamente determinadas, o isostáticas, representan el punto de partida esencial para cualquier desarrollo en este campo, no solo por su relevancia pedagógica, sino también porque constituyen los componentes fundamentales de sistemas más complejos y permiten una validación directa basada exclusivamente en las leyes del equilibrio. La implementación moderna de software en este dominio no se limita a la resolución de sistemas de ecuaciones; abarca la integración de flujos de trabajo de modelado de información (BIM), la automatización mediante interfaces de programación de aplicaciones (API) y la visualización interactiva de estados tensionales.

#### Evolución y vigencia del análisis isostático en el entorno digital

La definición técnica de una estructura estáticamente determinada reside en su capacidad de resolverse mediante la aplicación de las

ecuaciones de equilibrio estático, sin necesidad de recurrir a condiciones de compatibilidad de deformaciones o a leyes constitutivas del material para determinar las reacciones y esfuerzos internos (Cudmani, 2007). Para un cuerpo rígido en un plano bidimensional, esto se traduce en la satisfacción de tres condiciones fundamentales de equilibrio: la sumatoria de fuerzas en los ejes cartesianos y la sumatoria de momentos respecto a cualquier punto del plano deben ser nulas.

A pesar de que las estructuras contemporáneas tienden al hiperestatismo por razones de redundancia y seguridad, el análisis de sistemas isostáticos sigue siendo una prioridad en el desarrollo de software. Esto se debe a que el motor de cálculo de cualquier plataforma de ingeniería civil debe ser capaz de identificar y procesar subsistemas isostáticos para garantizar la estabilidad global. Un software que no puede detectar la inestabilidad inherente a una estructura con menos restricciones de las necesarias ( $r < \dots$ ) es inherentemente peligroso. Por tanto, la implementación de algoritmos de verificación de la determinación estática es la primera línea de defensa en la arquitectura de un sistema de análisis estructural (ver Tabla 3).

**Tabla 3: Condición de estabilidad en estructuras**

Condición de Estabilidad	Relación Matemática	Implicación en el Software
Estáticamente Determinada	$r =$	Solución única mediante estática.

Estáticamente Indeterminada	$r >$	Requiere métodos de flexibilidad o rigidez.
Inestable (Hipostática)	$r <$	El sistema de ecuaciones es singular (no resoluble).

## Arquitectura algorítmica de los métodos tradicionales

La digitalización de los métodos clásicos de análisis estructural requiere una descomposición lógica que permita transformar la inspección visual humana en procesos secuenciales para la computadora. Los dos pilares de esta transformación son el método de los nudos y el método de las secciones.

### Sistematización del Método de los Nudos

El método de los nudos se basa en el equilibrio de fuerzas concurrentes en cada unión de una armadura. En una implementación manual, el analista busca nudos con un máximo de dos incógnitas para proceder de forma iterativa. Sin embargo, en el software, este enfoque secuencial resulta ineficiente y propenso a errores de propagación. La implementación profesional opta por la formulación matricial global del equilibrio (Hibbeler, 2010).

En esta formulación, se construye una matriz de coeficientes  $[C]$  que encapsula la topología de la estructura. Cada fila de la matriz representa una ecuación de equilibrio (fuerzas en  $X$  o  $Y$  para cada nodo) y cada

columna corresponde a una incógnita (esfuerzo axial en una barra o una reacción de apoyo). La relación resultante es un sistema lineal:

$$[C]\{F\} = -\{P\}$$

Donde  $\{F\}$  es el vector de esfuerzos y reacciones y  $\{P\}$  el vector de cargas nodales aplicadas. El software debe manejar la construcción de esta matriz a partir de los cosenos directores de los elementos, los cuales se calculan a partir de las coordenadas de los nodos iniciales y finales. Este enfoque matricial permite al desarrollador utilizar bibliotecas de álgebra lineal de alto rendimiento como NumPy en Python o Lapack en C++, resolviendo estructuras de miles de nodos en fracciones de segundo.

### El Método de las Secciones y la generación de leyes de esfuerzos

Para vigas y marcos, el método de secciones es la base para la generación de diagramas de esfuerzos internos (axiales, cortantes y de momento). El algoritmo de implementación divide el elemento estructural en intervalos basados en la ubicación de cargas puntuales, en cambios en la magnitud de cargas distribuidas o en la presencia de apoyos (Meriam y Kraige, 2014). En cada intervalo, el software genera funciones matemáticas que describen el comportamiento de los esfuerzos internos.

La lógica interna del programa debe respetar las convenciones de signos de la mecánica de sólidos. Por lo general, un corte a la izquierda de una sección considera las fuerzas que vienen desde ese lado, donde el cortante hacia arriba y el momento antihorario se definen como positivos. La precisión del software en este punto es crítica, especialmente al calcular

los máximos y mínimos locales del momento flector, que ocurren en los puntos donde el diagrama de cortante cruza por cero.

## Ecosistema de herramientas y plataformas de desarrollo

La implementación de software estructural se manifiesta hoy en tres vertientes principales: herramientas comerciales consolidadas, soluciones en la nube con enfoque en la automatización y bibliotecas de código abierto orientadas a la personalización.

### Líderes comerciales y capacidades MEF

Software como SAP2000, Robot Structural Analysis y ETABS domina el mercado profesional debido a su capacidad para manejar no solo análisis isostáticos, sino también dinámicos, no lineales y de elementos finitos (MEF). SAP2000 destaca por su versatilidad en infraestructuras generales, con una interfaz gráfica 3D orientada a objetos que facilita la definición de casos de carga complejos. Robot Structural Analysis, por su parte, se beneficia de una integración profunda con el ecosistema BIM de Autodesk, lo que permite que el modelo analítico se derive directamente del modelo arquitectónico.

Dlubal Software, con su producto RFEM 6, ofrece un enfoque modular en el que los usuarios pueden añadir complementos para el diseño de materiales específicos como madera, vidrio o aluminio, manteniendo una base de cálculo de elementos finitos altamente eficiente. Estas herramientas comerciales garantizan la fiabilidad mediante procesos de calidad (QA) rigurosos, aunque su costo puede ser una barrera para la automatización a gran escala por parte de usuarios individuales.

## Innovación en la nube y automatización mediante API

SkyCiv ha transformado el paradigma del software estructural al ofrecer una plataforma basada íntegramente en la nube, accesible desde el navegador. Más allá de la interfaz gráfica, su valor reside en la SkyCiv API, que permite a los ingenieros automatizar el modelado y el análisis utilizando lenguajes como Python.

A través de la API, se pueden construir modelos estructurales programáticamente enviando objetos JSON que definen nodos, elementos, secciones y cargas. Esto permite realizar estudios de optimización paramétrica en los que el script ajusta las dimensiones de la estructura hasta encontrar la configuración más eficiente que cumpla con los criterios de diseño, algo que llevaría horas en un software tradicional. Además, la capacidad de generar reportes PDF con cálculos "paso a paso" proporciona una transparencia inusual en el software propietario, facilitando la auditoría de los resultados por parte de terceros.

## Bibliotecas de Python para ingeniería estructural

Python se ha consolidado como la lengua franca de la computación científica y el análisis estructural no es la excepción. Diversas bibliotecas permiten implementar soluciones isostáticas con un nivel de personalización extremo:

- **AnaStruct:** Especializada en el análisis bidimensional de estructuras de barras. Es ideal para aplicaciones educativas y scripts rápidos de verificación, lo que permite definir apoyos y cargas distribuidas y obtener diagramas de esfuerzos con pocas líneas de código.
- **PyNite:** Una biblioteca de elementos finitos ligera que soporta análisis

3D y 2D, el manejo de combinaciones de cargas y la generación de diagramas de deflexión y de esfuerzos internos. Su diseño intuitivo permite a ingenieros con conocimientos básicos de programación integrar análisis avanzados en sus flujos de trabajo.

- **OpenSeesPy:** La interfaz de Python para OpenSees, un potente motor de código abierto para simulaciones sísmicas y estructurales avanzadas. Aunque su complejidad es mayor, ofrece capacidades de análisis no lineal y dinámico que superan a muchos software comerciales (ver Tabla 4).

**Tabla 4: Bibliotecas en Python y C++**

Biblioteca	Lenguaje	Especialidad	Nivel de Complejidad
AnaStruct	Python	Marcos y vigas 2D	Bajo
PyNite	Python	MEF general 2D/3D	Medio
OpenSeesPy	Python	Análisis sísmico y no lineal	Alto
RSTAB	C++/C#	Marcos y cerchas profesionales	Comercial

## Arquitectura de software y patrones de diseño aplicados

Para que un software estructural sea confiable y escalable, su implementación debe seguir principios de ingeniería de software robustos.

La complejidad de los datos estructurales exige arquitecturas que desacoplen la lógica de cálculo de la representación visual.

## El patrón Modelo-Vista-Controlador (MVC) y la Arquitectura en Capas

El patrón MVC es fundamental en aplicaciones estructurales. El Modelo contiene los datos físicos (nodos, secciones, matrices de rigidez); la Vista se encarga de representar estos datos (diagramas de momentos, renders 3D de la deformación) y el Controlador gestiona la interacción del usuario y el flujo del análisis estructural (España et al., 2016).

Complementariamente, la arquitectura en capas asegura que las capas superiores (interfaz de usuario) no dependan de los detalles de implementación de las capas inferiores ( motores de álgebra lineal). Esto facilita, por ejemplo, cambiar el motor de resolución de ecuaciones de un método de eliminación gaussiana simple a un solver de matrices dispersas optimizado sin afectar la experiencia del usuario.

## Patrones de comportamiento y procesamiento de datos

En sistemas que manejan grandes volúmenes de datos, como el monitoreo de salud estructural en tiempo real, se aplican patrones como Event-Driven Architecture (arquitectura dirigida por eventos). Esto permite que el software reaccione a cambios en las lecturas de sensores o actualizaciones en el modelo arquitectónico de forma asíncrona, manteniendo la fluidez de la aplicación.

Para flujos de trabajo de preprocesamiento, en los que la geometría debe transformarse en una malla de elementos finitos y luego en resultados

analíticos, el patrón Pipe-Filter es muy efectivo. Cada etapa del flujo actúa como un filtro que transforma los datos y los transmite al siguiente componente, garantizando una trazabilidad clara del proceso.

## Calidad del código y mantenibilidad

La implementación profesional de software de ingeniería debe evitar el "acoplamiento fuerte" entre componentes. El uso de la inyección de dependencias permite probar módulos de cálculo de forma aislada mediante datos simulados (*mocking*), lo cual es vital para la verificación del software. Además, la adopción de convenciones de nomenclatura claras y la documentación mediante herramientas como HandCalcs o PyLaTeX permiten que el código sea autodocumentado, facilitando que otros ingenieros verifiquen la lógica física detrás de las líneas de programación.

## Implementación de la Teoría de Euler-Bernoulli

El núcleo del análisis de vigas y marcos en el software estructural suele basarse en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Esta teoría supone que las secciones transversales permanecen planas y normales al eje neutro tras la deformación, lo cual es una aproximación excelente para elementos esbeltos (Hughes, 1987).

La matriz de rigidez local para un elemento de marco plano integra los efectos de carga axial, cortante y de flexión. En un entorno de programación, esta matriz se define en función de las propiedades del elemento: área ( $A$ ), módulo de Young ( $E$ ), momento de inercia ( $I$ ) y longitud ( $L$ ).

$$K_{local} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La implementación en Python utiliza arreglos de NumPy para estas matrices, lo que permite realizar transformaciones de coordenadas mediante la multiplicación por matrices de rotación basadas en el ángulo de inclinación del elemento. Este proceso de transformación es el puente que permite llevar las fuerzas del sistema de coordenadas local del elemento al sistema de coordenadas global de la estructura.

## Visualización y postprocesamiento en la ingeniería civil

Un análisis estructural es tan útil como la capacidad del ingeniero para interpretar sus resultados. El postprocesamiento de datos estructurales requiere técnicas de visualización avanzadas que vayan más allá de simples tablas numéricas (Colina y Ramírez, 2000).

### Graficación de diagramas de esfuerzos con Matplotlib y Plotly

Las bibliotecas de visualización de Python son herramientas potentes para generar la documentación gráfica necesaria en un proyecto estructural. Matplotlib es la opción estándar para gráficos 2D estáticos de alta calidad, lo que permite superponer diagramas de momentos flectores sobre la geometría de la viga, con control milimétrico de las escalas y las anotaciones.

Para interfaces interactivas y cuadros de mando (*dashboards*), se utilizan Plotly o Bokeh. Estas bibliotecas permiten al usuario rotar modelos 3D, inspeccionar valores de esfuerzo en puntos específicos mediante el desplazamiento del ratón y visualizar animaciones de los modos de vibración o de la deformación bajo diferentes hipótesis de carga. El uso de contornos de color (*heatmaps*) facilita la identificación rápida de zonas críticas donde los esfuerzos superan la capacidad resistente de la sección.

### Renderizado 3D e integración con APIs de modelado

El software moderno ofrece capacidades de renderizado 3D que permiten visualizar no solo la línea analítica de la estructura, sino también la sección transversal real extruida a lo largo de su longitud. Esta visualización ayuda a detectar errores de modelado, como orientaciones incorrectas de los ejes débiles y fuertes de las columnas o interferencias geométricas que no se aprecian en un modelo de barras simple.

La integración con APIs como la de FreeCAD permite que los resultados del análisis estructural generen automáticamente cambios en la geometría del modelo CAD. Por ejemplo, un script puede aumentar el peralte de una viga isostática si la deflexión calculada supera los límites de servicio, cerrando el ciclo entre el análisis y el diseño detallado sin intervención manual.

### Automatización y optimización: el enfoque académico en Perú

La academia en Perú, en particular instituciones como la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) y la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), ha liderado investigaciones significativas en la

automatización del análisis estructural isostático e hiperestático aplicado a la realidad local.

### Investigaciones en el repositorio de la UNI y PUCP

Las tesis y proyectos de investigación en estas universidades se han enfocado recientemente en la implementación de la metodología BIM (Building Information Modeling) para optimizar el diseño estructural de edificaciones de concreto armado y acero. Un tema recurrente es la automatización de la obtención de mediciones y cantidades de obra mediante el uso de APIs de software de modelado 3D, lo que permite una gestión de proyectos basada en datos más precisa.

Además, se han desarrollado estudios sobre el análisis numérico de la respuesta estructural de edificios típicos en Lima, considerando la influencia de elementos como tanques de agua elevados o la interacción suelo-estructura mediante inclusiones rígidas. Estas investigaciones a menudo emplean software comercial como ETABS o SAP2000, pero integran scripts personalizados en Python o MATLAB para procesar grandes volúmenes de datos sísmicos y generar reportes automatizados siguiendo la normativa peruana E.030 de Diseño Sismorresistente (ver Tabla 5).

**Tabla 5: Desarrollo de software en universidades (ejemplos)**

Universidad	Área de Investigación	Tecnología Aplicada
UNI	Modelado y gestión BIM	APIs de software 3D, VDC

PUCP	Optimización de diseño	S-Bim, automatización de cantidades
U. de Lima	IA en seguridad y confort	Redes neuronales, visión artificial

## Automatización de la documentación técnica en proyectos estructurales

Una de las mayores ineficiencias en la práctica de la ingeniería estructural es la transcripción manual de resultados en memorias de cálculo. La implementación de software moderno busca solucionar esto mediante la generación automática de documentación. Herramientas como HandCalcs permiten que el flujo de trabajo en un Jupyter Notebook sea directamente exportable a un reporte PDF profesional, donde se muestran no solo los resultados finales, sino también todas las fórmulas y sustituciones intermedias. Esto mejora la transparencia y facilita la revisión por parte de las entidades gubernamentales o de revisores independientes, reduciendo los tiempos de aprobación de proyectos.

## El papel del álgebra lineal en el motor de cálculo

El éxito de cualquier implementación de software estructural reside en la eficiencia de su motor de álgebra lineal. La resolución de sistemas de ecuaciones para estructuras isostáticas puede parecer trivial, pero requiere un manejo cuidadoso de la precisión numérica y la estabilidad del algoritmo.

## Operaciones vectoriales y matriciales

El uso de operaciones vectoriales, como el producto punto y el producto cruz, es esencial para calcular momentos y transformar fuerzas en el espacio 3D. En lenguajes como Rust o Python, la gestión de memoria y el aprovechamiento del paralelismo en operaciones matriciales permiten que el software sea escalable.

La transposición de matrices es una operación frecuente en el análisis estructural. Por ejemplo, al convertir desplazamientos globales en locales, se utiliza la transpuesta de la matriz de rotación. Debido a que las matrices de rotación son ortogonales, su transpuesta es igual a su inversa, una propiedad que el software eficiente debe aprovechar para evitar cálculos innecesarios de inversas de matrices (Blanco et al., 2015).

## Algoritmos de resolución: Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Para sistemas isostáticos, el método de eliminación gaussiana sigue siendo un estándar de implementación. Sin embargo, para evitar errores de redondeo numérico, es fundamental implementar técnicas de pivoteo parcial o de escalado de columna. Estas técnicas reordenan las filas del sistema de ecuaciones para que los elementos de la diagonal principal (pivotes) sean los de mayor valor absoluto posible, garantizando que las divisiones durante la eliminación no amplifiquen los errores de precisión.

El software debe ser capaz de detectar si la matriz es singular antes de proceder. Una matriz singular en el análisis estructural indica que la estructura es hipostática o que existe un mecanismo de colapso, lo que debe activar de inmediato una alerta al usuario en lugar de intentar una división por cero (Blanco et al., 2015).

## Verificación, validación y mejores prácticas profesionales

A medida que el software de ingeniería se vuelve más potente y complejo, la necesidad de procesos de Verificación y Validación (V&V) se vuelve crítica. Los ingenieros no deben tratar al software como una "caja negra" infalible.

### Estrategias de Verificación y Validación (V&V)

La verificación busca confirmar que el software resuelve las ecuaciones matemáticas correctamente. Esto se logra comparando los resultados del programa con soluciones analíticas exactas de problemas clásicos de la estática. Por otro lado, la validación se encarga de determinar si el modelo matemático elegido representa adecuadamente el fenómeno físico real. Esto requiere comparar los resultados del software con datos experimentales obtenidos de pruebas de carga en estructuras reales o en modelos a escala.

Las empresas de software estructural deben seguir procedimientos de Garantía de Calidad del Software (SQA), documentando cada cambio en el código y manteniendo una suite de pruebas de regresión que asegure que las actualizaciones del software no introduzcan errores en funcionalidades que antes funcionaban correctamente.

### Buenas prácticas en la creación de hojas de cálculo y scripts

Para los ingenieros que desarrollan sus propias herramientas de cálculo en Excel o Python, existen mejores prácticas fundamentales:

- **Separación de entradas y lógica:** Los datos de entrada (propiedades de

materiales, geometría) deben estar claramente separados de las celdas o funciones que realizan el cálculo. Esto evita que cambios accidentales en las fórmulas corrompan los resultados.

- **Uso de nombres de variables:** En lugar de referirse a celdas como "B15", se deben utilizar nombres descriptivos como "Fy" (límite de fluencia) o "Ix" (momento de inercia). Esto hace que las fórmulas sean legibles y fáciles de auditar por un revisor.
- **Documentación de fuentes:** Cada cálculo debe incluir referencias a las normativas aplicables (como el código ACI 318 o la norma E.060 de concreto armado) para justificar los coeficientes y factores de seguridad utilizados.
- **Uso de gráficos de verificación:** Incluir diagramas automáticos de cuerpo libre y de esfuerzos ayuda a identificar, mediante la inspección visual, errores de modelado evidentes.

## El futuro: Inteligencia Artificial y Lenguaje Natural en FEA

La próxima frontera en la implementación de software estructural es la integración de modelos de lenguaje de gran escala (LLM) y técnicas de inteligencia artificial para democratizar el acceso a herramientas avanzadas.

### FeaGPT y la interfaz conversacional para simulación

Marcos de trabajo emergentes como FeaGPT proponen un cambio de paradigma: permitir que el ingeniero controle el flujo de trabajo de análisis estructural mediante lenguaje natural. En lugar de manipular manualmente menús y herramientas de dibujo, el usuario describe la estructura ("una viga de acero de 6 metros, apoyada en los extremos, con una carga puntual de 10

kN en el centro"). El sistema utiliza el LLM para interpretar la intención, generar la geometría paramétrica en FreeCAD, crear la malla en Gmsh, configurar el solver CalculiX y presentar los resultados finales.

Esta integración no solo mejora la accesibilidad, sino que también permite una exploración del diseño mucho más rápida. Un ingeniero podría pedirle a la IA que "genere y analice 10 variaciones de la armadura optimizando el peso de las barras superiores", algo que tradicionalmente requeriría un experto en programación de optimización. Sin embargo, esta facilidad de uso aumenta la necesidad de sistemas de validación automáticos que aseguren que los resultados generados por la IA son físicamente consistentes.

## Visión artificial aplicada al análisis estructural

Otra aplicación innovadora es el uso de la visión artificial para convertir bocetos dibujados a mano en modelos estructurales analizables. Mediante modelos de detección de objetos y reconocimiento de números, un sistema puede procesar una fotografía de una viga dibujada en un cuaderno, identificar los apoyos, las cargas y las dimensiones, y exportar un modelo listo para ser resuelto en OpenSees. Aunque esta tecnología aún enfrenta desafíos con la interpretación de unidades y caligrafías complejas, representa una herramienta de inmenso valor para revisiones rápidas en campo y para facilitar la transición del diseño conceptual al análisis técnico.

La implementación de software en el análisis estructural estáticamente determinado ha evolucionado de ser una mera calculadora de soporte a convertirse en un ecosistema de diseño inteligente. La base teórica de la estática isostática, aunque centenaria, sigue siendo el filtro

definitivo de validez para cualquier sistema computacional. La tendencia hacia la automatización mediante APIs, la integración con BIM y el uso incipiente de IA están redefiniendo el papel del ingeniero estructural, desplazando su labor del cálculo manual repetitivo hacia la supervisión de procesos automatizados y la toma de decisiones críticas basadas en datos.

El éxito en este campo no depende solo de la potencia del hardware o de la complejidad del algoritmo, sino también de la robustez de la arquitectura del software y del rigor de los procesos de verificación y validación. A medida que las herramientas se vuelven más accesibles y potentes, la responsabilidad del profesional de asegurar la integridad y la seguridad de las estructuras aumenta. La formación del ingeniero contemporáneo debe, por tanto, equilibrar un entendimiento profundo de los principios físicos con una competencia técnica sólida en las herramientas digitales que permiten aplicarlos a gran escala para construir un mundo más seguro y eficiente.

## Capítulo III

# Tratado integral de mecánica de estructuras: Evolución, teoría y aplicación de los métodos de análisis

La mecánica de estructuras constituye el núcleo fundamental de la ingeniería civil y mecánica, proporcionando el marco teórico y práctico necesario para comprender cómo los sistemas resistentes responden a las cargas externas y a las deformaciones impuestas. En su acepción más contemporánea, el análisis estructural se define como el conjunto de métodos y técnicas que permiten evaluar la viabilidad de las estructuras diseñadas y el grado de satisfacción de múltiples criterios de diseño, como la seguridad, la funcionalidad y la economía. El objetivo primordial de esta disciplina es determinar la respuesta estructural, entendida como la predicción de los estados de tensión y deformación a los que un sistema se verá sometido durante su construcción y su vida útil.

Históricamente, el análisis de estructuras entronca con la tradición de la resistencia de los materiales y la teoría de la elasticidad, cuyos orígenes se remontan a la segunda mitad del siglo XVIII. El advenimiento de la revolución industrial y la aparición de materiales como la fundición y el acero impulsaron la necesidad de métodos de cálculo más precisos para nuevas tipologías, como los puentes de grandes luces y las estructuras reticuladas complejas. Desde los trabajos de Louis Navier sobre arcos hiperestáticos hasta el desarrollo de los métodos matriciales y de elementos

finitos en el siglo XX, la disciplina ha evolucionado en paralelo con el poder computacional, permitiendo hoy el análisis de sistemas con millones de grados de libertad.

## Clasificación y principios fundamentales del análisis estructural

La organización de las partes de un sistema resistente determina su comportamiento mecánico. Las estructuras pueden clasificarse según su geometría en estructuras de barras y estructuras continuas. Las estructuras de barras están formadas por elementos prismáticos donde una dimensión predomina sobre las otras dos, como vigas, columnas y cerchas, y su análisis suele abordarse desde los postulados de la resistencia de materiales, asumiendo el principio de Saint-Venant para determinar tensiones a partir de esfuerzos seccionales. Por otro lado, las estructuras continuas, como placas, láminas y sólidos masivos, requieren métodos de discretización numérica debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales que rigen su comportamiento (Berrocal, 2007).

### Análisis estático frente al análisis dinámico

Una distinción crítica en la mecánica de estructuras es la naturaleza temporal de las acciones aplicadas. El análisis estructural se divide fundamentalmente en estático y dinámico, basándose en si la aceleración de la masa del sistema produce fuerzas de inercia significativas en comparación con las fuerzas de restauración elástica (Ver Tabla 6).

**Tabla 6: Estática Vs. Dinámica**

Característica	Análisis Estático	Análisis Dinámico
Definición	Evalúa cargas constantes o que cambian muy lentamente en el tiempo.	Examina la respuesta a cargas que varían rápidamente con el tiempo.
Parámetros medidos	Fuerzas internas, momentos flectores y desplazamientos bajo cargas fijas.	Períodos de vibración, frecuencias naturales y formas modales.
Modelado de carga	Las cargas se consideran constantes; no hay efectos de frecuencia.	Las cargas incluyen efectos de tiempo, inercia y amortiguamiento.
Aplicaciones comunes	Peso propio, cargas muertas, sobrecargas de uso estacionarias.	Terremotos, vientos ráfagas, impactos, tráfico móvil en puentes.
Complejidad	Generalmente directo y lineal, con menor demanda computacional.	Elevada complejidad; requiere integración temporal o análisis espectral.

En el análisis estático, la respuesta es una configuración de equilibrio único. En cambio, el análisis dinámico requiere considerar que la estructura posee múltiples formas de vibrar, denominadas modos de vibración, cada una asociada a una frecuencia específica. Esta distinción es fundamental para el diseño sismorresistente, donde la interacción entre las frecuencias

del suelo y las frecuencias de la estructura puede amplificar drásticamente las solicitudes.

## Linealidad y no linealidad estructural

La mayoría de los códigos de diseño se basan en el análisis elástico lineal, el cual supone que los desplazamientos son pequeños y que el material sigue la ley de proporcionalidad de Hooke. Sin embargo, el comportamiento real de las estructuras a menudo trasciende estos supuestos (Berrocal, 2007).

La no linealidad puede ser de dos tipos principales:

1. **No linealidad geométrica:** Se presenta cuando grandes deformaciones o rotaciones alteran la dirección y magnitud de las cargas internas. Un ejemplo clásico es el efecto P-Delta en edificios altos, donde la carga vertical sobre una columna desplazada lateralmente genera momentos flectores adicionales que pueden comprometer la estabilidad global.
2. **No linealidad del material:** ocurre cuando la relación tensión-deformación deja de ser proporcional, como en el caso de la fluencia del acero o el agrietamiento del concreto. El análisis no lineal permite evaluar la capacidad de carga última y el mecanismo de colapso mediante técnicas como el análisis pushover.

El uso de análisis no lineal es crítico para evaluar estructuras bajo cargas dinámicas extremas, permitiendo una predicción más precisa del daño esperado durante un evento sísmico severo. Mientras que el análisis lineal es adecuado para el diseño básico por su eficiencia, el análisis no lineal es indispensable para la ingeniería de desempeño y la rehabilitación estructural.

# Métodos clásicos de análisis manual para estructuras hiperestáticas

Antes del desarrollo masivo de los computadores, la ingeniería estructural dependía de métodos iterativos y aproximaciones gráficas para resolver sistemas estáticamente indeterminados. Estos métodos siguen siendo pilares en la formación académica y herramientas valiosas para la verificación rápida de resultados computacionales.

## El método de distribución de momentos de Hardy Cross

Publicado en 1930, el método de Cross permitió a los ingenieros resolver pórticos complejos sin recurrir a la resolución de grandes sistemas de ecuaciones simultáneas. El método se basa en el concepto de que cada nudo de una estructura rígida tiene una capacidad de resistencia al giro proporcional a la rigidez de las barras que en él concurren (Akaogi, 2017).

El procedimiento iterativo del método de Cross se resume en los siguientes pasos:

1. **Cálculo de momentos de empotramiento perfecto (MEP):** Se asume que todos los nudos están bloqueados contra el giro. Se calculan los momentos producidos por las cargas externas en los extremos de cada barra.
2. **Determinación de factores de distribución (FD):** La rigidez flexional de una barra ( $K$ ) se define como la relación entre el producto del módulo de elasticidad ( $E$ ) y el momento de inercia ( $I$ ) dividido por la longitud ( $L$ ). El factor de distribución para un nudo es la rigidez de una barra específica dividida por la suma de las rigideces de todas las

barras conectadas a ese nudo ( $FD = K_i / \sum K_i$ ).

3. **Distribución y transporte:** Los momentos de desequilibrio en cada nudo se reparten entre las barras concurrentes según sus FD. Posteriormente, se realiza un transporte de momentos al otro extremo de la barra, generalmente utilizando un factor de transporte de 0.5 para nudos empotados.
4. **Convergencia:** El proceso se repite hasta que los momentos distribuidos sean tan pequeños que no afecten el resultado final, logrando generalmente una precisión adecuada en 3 o 4 iteraciones.

Este método es particularmente eficaz para vigas continuas y marcos sin desplazamientos laterales. Para estructuras con ladeo, se requiere la aplicación de métodos adicionales o correcciones por desplazamientos.

### El método de pendiente-deflexión (Slope-Deflection)

A diferencia de Cross, el método de pendiente-deflexión es un método de desplazamientos que expresa los momentos en los extremos de las barras como funciones lineales de las rotaciones angulares y los desplazamientos de los nudos (Beer et al., 2013). Las ecuaciones fundamentales relacionan los momentos internos con los grados de libertad de la estructura, permitiendo establecer ecuaciones de equilibrio en cada nudo.

El procedimiento estándar incluye:

- Identificar los grados de libertad (rotaciones y desplazamientos lineales desconocidos).
- Aplicar las fórmulas de momentos de empotramiento perfecto para las

cargas aplicadas.

- Escribir las ecuaciones de pendiente-deflexión para cada extremo de barra en función de las rotaciones ( $\theta$ ) y desplazamientos ( $\Delta$ ).
- Establecer las ecuaciones de equilibrio de nudos y, en caso de pórticos con ladeo, las ecuaciones de equilibrio de cortante de piso.
- Resolver el sistema de ecuaciones para hallar los desplazamientos y, así, sustituir estos valores para obtener los momentos internos.

## Métodos de energía y teoremas de Castigiano

Los métodos energéticos se basan en el principio de conservación de la energía, donde el trabajo realizado por las cargas externas se almacena como energía de deformación interna en el sistema elástico.

El segundo

es una herramienta poderosa para el cálculo de deflexiones y la resolución de estructuras hiperestáticas. Este establece que la derivada parcial de la energía de deformación total respecto a una carga aplicada es igual al desplazamiento en la dirección de dicha carga (Beer et al., 2013).

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

Donde  $U$  es la energía interna, la cual depende de los esfuerzos axiales, momentos flectores y cortantes integrados a lo largo de la estructura. El procedimiento implica el uso de cargas ficticias cuando se desea calcular desplazamientos en puntos donde no existen cargas reales. Tras derivar la expresión de la energía e integrar sobre la longitud de los

elementos, se obtiene el valor de la deformación o rotación deseada. Estos métodos son aplicables no solo a vigas y pórticos, sino también a armaduras y estructuras mixtas.

## Análisis matricial de estructuras: el método de la rigidez

El desarrollo de los computadores digitales permitió la sistematización del análisis estructural mediante el álgebra matricial. El método de la rigidez, también conocido como el método de los desplazamientos, es el estándar de la industria debido a su naturaleza algorítmica y su capacidad para manejar estructuras con miles de elementos (Blanco et al., 2015).

### Concepto de rigidez y construcción de matrices locales

La base del método es la relación constitutiva que vincula las fuerzas nodales  $\{F\}$  con los desplazamientos nodales  $\{\Delta\}$  a través de una matriz de rigidez  $[K]$ . Para cada elemento de la estructura, se define una matriz de rigidez local ( $K'$ ) en un sistema de referencia alineado con la directriz del elemento.

Por ejemplo, para una barra sometida exclusivamente a carga axial, la matriz de rigidez local relaciona los desplazamientos axiales en sus extremos:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $A$  el área de la sección y  $L$  la longitud. Para elementos que trabajan a flexión (vigas y pórticos), las matrices son más complejas e incluyen términos de inercia ( $I$ ) y rigidez al giro.

### Transformación de coordenadas y ensamblaje global

Dado que los elementos de una estructura pueden tener orientaciones arbitrarias en el espacio, es necesario transformar las matrices locales en un sistema de coordenadas global único. Esto se logra mediante una matriz de transformación ( $T$ ) basada en los cosenos directores de la barra respecto a los ejes globales.

La matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales ( $K$ ) se obtiene como:

$$[K] = ^T [K']$$

El proceso de ensamblaje consiste en agrupar las matrices de cada elemento en una gran matriz de rigidez global que represente a toda la estructura. Este proceso asegura la compatibilidad de desplazamientos en los nudos y el equilibrio de fuerzas externas.

### Aplicación de condiciones de contorno y resolución

La matriz global ensamblada es singular, lo que significa que no puede invertirse porque la estructura podría desplazarse como un sólido rígido. Para obtener una solución única, es necesario aplicar las restricciones de apoyo (condiciones de contorno). Esto implica eliminar las filas y

columnas correspondientes a los grados de libertad restringidos o utilizar métodos de penalización para imponer desplazamientos nulos (Blanco et al., 2015).

Una vez aplicada la restricción, el sistema de ecuaciones reducido se resuelve para encontrar los desplazamientos nodales incógnita. A partir de estos desplazamientos, se pueden calcular las reacciones en los apoyos y los esfuerzos internos en cada barra mediante la aplicación inversa de las matrices de rigidez locales.

## El método de los elementos finitos (MEF) en la ingeniería estructural

El MEF representa la evolución natural de los métodos matriciales, permitiendo el análisis de medios continuos y geometrías tridimensionales complejas mediante la discretización del dominio en un número finito de elementos más pequeños (Vázquez y López, 2001).

### Discretización y funciones de forma

En el MEF, el comportamiento de un elemento se especifica mediante parámetros asociados a sus nodos. La variable principal (como el desplazamiento) en el interior del elemento se aproxima a través de funciones de interpolación o funciones de forma ( $N$ ).

El estado de deformación y tensión dentro de cada elemento se define de manera única en función de los desplazamientos nodales, permitiendo establecer una relación entre fuerzas y desplazamientos de la forma  $\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$ , análoga a la del cálculo matricial de barras. Una propiedad fundamental del método es la convergencia: a medida que el

mallado se hace más fino, la solución numérica se aproxima a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales del sistema.

## Tipologías de elementos y aplicaciones prácticas

El éxito del MEF radica en su versatilidad para modelar diferentes fenómenos físicos y geometrías (Ver Tabla 7).

**Tabla 7: Tipología de elementos**

Tipo de Elemento	Geometría	Aplicación Principal
Elementos Truss	Línea (2 nodos)	Armaduras, cerchas, cables (solo carga axial).
Elementos Beam	Línea (2-3 nodos)	Vigas, pórticos, marcos (flexión, corte y axial).
Elementos Shell	Superficie (3-4 nodos)	Losas, muros, láminas, cascarones (flexión y membrana).
Elementos Solid	Volumen (4-20 nodos)	Presas masivas, cimentaciones, componentes mecánicos 3D.
Elementos Elásticos 2D	Superficie (3-4 nodos)	Ánálisis de tensión y deformación plana en secciones.

El uso de elementos tipo shell es particularmente relevante en la edificación para el diseño de losas de concreto armado, donde el programa calcula la armadura necesaria integrando los momentos flectores ( $M_{11}, M_{22}$ ) y esfuerzos de membrana ( $N_{11}, N_{22}$ ) obtenidos del análisis.

## Análisis sismorresistente según la normativa técnica peruana (E.030)

En regiones de alta sismicidad como el Perú, el análisis de estructuras debe cumplir con las exigencias de la norma técnica NTE E.030, la cual establece principios para minimizar la pérdida de vidas humanas y asegurar la operatividad de servicios básicos tras un sismo severo.

### Parámetros de peligro sísmico y sitio

La norma cuantifica la demanda sísmica a través de varios factores que modifican el espectro de respuesta.

- **Factor de Zona (Z):** Representa la aceleración máxima horizontal en suelo rígido. El Perú se divide en 4 zonas, asignando valores desde  $Z = 0.10$  (Selva) hasta  $Z = 0.45$  (Costa).
- **Factor de Uso (U):** Clasifica las estructuras según su importancia. Las edificaciones esenciales como hospitales tienen un factor  $U = 1.5$ , mientras que las viviendas comunes tienen  $U = 1.0$ .
- **Parámetros de Suelo (S):** El tipo de perfil de suelo (desde roca dura S0 hasta suelos muy blandos S3) amplifica las ondas sísmicas y define la forma de la meseta del espectro de diseño.
- **Factor de Amplificación Sísmica (C):** Relaciona el período de vibración de la estructura con los períodos característicos del suelo,

disminuyendo la aceleración conforme la estructura es más flexible.

## Análisis estático frente al análisis dinámico modal

La norma establece criterios para elegir el método de análisis adecuado en función de la altura, regularidad e importancia del edificio.

1. **Análisis Estático o de Fuerzas Equivalentes:** Representa el sismo como fuerzas horizontales aplicadas en cada nivel. Es aplicable solo a estructuras regulares en zonas de baja sismicidad o edificios de poca altura. El cortante en la base se calcula como  $V = (Z \cdot U \cdot C \cdot S/R) \cdot P$ , donde  $R$  es el coeficiente de reducción de fuerza sísmica y  $P$  el peso sísmico efectivo.
2. **Análisis Dinámico Modal Espectral:** Utiliza los modos de vibración y sus masas participativas. Se debe considerar un número de modos tal que se movilice al menos el 90% de la masa total de la estructura en cada dirección. Los resultados de este análisis deben escalarse si el cortante dinámico en la base es menor al 80% del estático en estructuras regulares, o al 90% en irregulares.

## Criterios de regularidad y control de derivas

La concepción estructural favorece la simetría y la continuidad tanto en planta como en elevación. Las irregularidades (como el piso blando, la irregularidad de masa o la discontinuidad del diafragma) penalizan el diseño reduciendo el factor  $R$ , lo que incrementa las fuerzas de diseño (Vázquez y López, 2001).

Por ende, el control de las distorsiones de entrepiso (derivadas) es el requisito más riguroso de la norma peruana. Para estructuras de concreto

armado, la deriva máxima no debe exceder el 0.007. Los desplazamientos calculados elásticamente se multiplican por  $0.75R$  o  $0.85R$  para obtener los desplazamientos inelásticos máximos esperados.

## Software de ingeniería estructural y algoritmos de cálculo

El mercado actual ofrece diversas herramientas de software especializadas que implementan los métodos de análisis antes descritos. La elección del programa depende de la tipología del proyecto y los requerimientos de diseño.

### Ecosistema de software de CSI: SAP2000 y ETABS

Computers and Structures, Inc. (CSI) desarrolla los programas más utilizados en el ámbito global para el cálculo estructural.

- **SAP2000:** Es un software de propósito general. Es la herramienta ideal para estructuras complejas y variadas como puentes, presas, tanques, estadios y estructuras industriales. Ofrece una flexibilidad superior para modelar elementos sólidos y realizar análisis no lineales avanzados.
- **ETABS:** Está optimizado específicamente para edificios de varios niveles. Automatiza la creación de diafragmas de piso, la distribución de cargas gravitatorias y el diseño de elementos de concreto y acero según normativas locales. A diferencia de SAP2000, ETABS suele concentrar la masa del objeto de barra en los nudos extremos, lo que puede requerir una discretización manual para capturar con precisión los modos de vibración verticales en vigas de gran vano.

## Algoritmos para el análisis dinámico: Eigen y Ritz

En el análisis dinámico, la determinación de los modos de vibración es el paso computacional más costoso. Los ingenieros deben elegir entre dos tipos de vectores para el análisis modal:

- **Vectores Eigen (Vectores Propios):** Son la solución matemática pura del sistema de ecuaciones de masa y rigidez. Representan las frecuencias naturales libres de la estructura. Son adecuados cuando no hay una carga dominante predefinida.
- **Vectores Ritz (Vectores de Carga-Dependientes):** Se calculan considerando la distribución espacial de las cargas dinámicas aplicadas. Para el mismo número de modos, los vectores Ritz proporcionan una mayor masa participativa y convergen más rápido en el análisis de espectro de respuesta, especialmente para aceleraciones verticales y análisis sísmicos complejos.

El algoritmo de Lanczos es el método iterativo más utilizado por estos programas para encontrar los valores propios más útiles de matrices grandes y dispersas, superando en eficiencia a los métodos tradicionales de transformación de Householder en sistemas de gran escala.

## Síntesis de la práctica del análisis estructural moderno

La mecánica de estructuras ha evolucionado desde las aproximaciones iterativas manuales hacia un campo dominado por la simulación computacional de alta fidelidad. Sin embargo, la esencia del análisis estructural permanece inalterada: la búsqueda de un equilibrio satisfactorio entre la seguridad, la funcionalidad y la economía.

La integración de la metodología BIM (Building Information Modeling) representa la tendencia actual, donde programas como Revit y Tekla se sincronizan con herramientas de análisis para permitir un flujo de trabajo colaborativo y reducir errores en la detección de interferencias. A pesar de la potencia del software, el criterio del ingeniero sigue siendo el componente más crítico. Comprender las hipótesis detrás de cada método —ya sea la distribución de momentos de Cross, la formulación de los elementos finitos o las simplificaciones del análisis estático equivalente— es fundamental para interpretar correctamente los resultados y garantizar la integridad de las obras que definen nuestro entorno construido.

La transición hacia el diseño basado en resiliencia y el análisis no lineal de tiempo-historia marcará la pauta en las próximas décadas, permitiendo estructuras capaces no solo de resistir eventos catastróficos, sino de recuperarse rápidamente de ellos, asegurando así un desarrollo urbano más sostenible y seguro para las futuras generaciones.

# Capítulo IV

## Análisis Integral de las Estructuras Articuladas Isostáticas: Teoría, Métodos de Cálculo y Aplicaciones en la Ingeniería Estructural

Las estructuras articuladas, comúnmente denominadas cerchas, armaduras o celosías, representan una de las soluciones más eficientes y elegantes en la historia de la ingeniería civil y la arquitectura. Estos sistemas, constituidos por un conjunto de barras rectas interconectadas en sus extremos mediante nudos o articulaciones, están diseñados para optimizar la distribución de cargas externas, transformándolas principalmente en esfuerzos axiles de tracción y compresión. El calificativo de isostática o estrictamente completa se otorga a aquella estructura donde los esfuerzos internos en cada una de sus barras y las reacciones en sus apoyos pueden determinarse de forma única y precisa utilizando exclusivamente las ecuaciones fundamentales de la estática.

La relevancia de los sistemas isostáticos radica no solo en su simplicidad analítica, sino en su comportamiento mecánico ante fenómenos que afectarían gravemente a estructuras con mayor grado de restricción. Una estructura isostática posee el número exacto de ligaduras para garantizar su inmovilidad como sólido rígido, permitiendo al mismo tiempo una libertad de deformación interna ante cambios de temperatura o

asentamientos en los apoyos que evita la aparición de tensiones parásitas o esfuerzos internos no deseados. El presente reporte técnico profundiza en la ontología de estos sistemas, sus bases matemáticas, las metodologías de resolución y su diversificación tipológica en el contexto de la construcción moderna.

## Fundamentos Físicos y Mecánicos de las Estructuras Articuladas

El comportamiento de una estructura articulada se sustenta en el principio de la estabilidad geométrica del triángulo. A diferencia de un polígono de cuatro o más lados, el triángulo es la única figura geométrica que no puede deformarse sin alterar la longitud de sus lados, lo que lo convierte en el bloque fundamental para la construcción de armaduras rígidas e indeformables.

### Hipótesis de Diseño y Simplificaciones Estructurales

Para que el análisis de una estructura articulada se mantenga dentro del dominio de la estática clásica y sea representativo de la realidad física, se deben aceptar diversas hipótesis de diseño que simplifican el modelo sin sacrificar la seguridad estructural. En primer lugar, se asume que las barras están unidas entre sí mediante articulaciones perfectas, es decir, pasadores sin fricción que permiten el giro libre de las barras concurrentes en un nudo. Esta condición implica que no existe transmisión de momentos flectores de una barra a otra a través de la unión (Cervera & Blanco, 2002).

En segundo lugar, se establece que las cargas externas y las reacciones de los apoyos actúan exclusivamente sobre los nudos. Si una carga se aplicara directamente sobre el cuerpo de una barra, esta se vería

sometida a esfuerzos de flexión y cortante, invalidando la naturaleza de "articulación pura" del sistema. En la práctica, aunque los pesos propios de las barras se distribuyen a lo largo de su longitud, para el cálculo se reparten proporcionalmente entre los nudos extremos de cada elemento. Por lo que se considera que los ejes de todas las barras que concurren en un nudo son coplanares y concurrentes en un único punto geométrico, eliminando excentricidades que podrían inducir momentos torsionantes o flectores secundarios.

## El Concepto de Isostática y Equilibrio Estático

Una estructura isostática se define matemáticamente como aquella que posee un número de incógnitas igual al número de ecuaciones de equilibrio disponibles. En el plano bidimensional, estas ecuaciones se derivan de la ley de Newton que exige que la resultante de fuerzas y momentos sea nula para que el sistema permanezca en reposo.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

Desde una perspectiva técnica, las estructuras isostáticas son "estrictamente completas". Si se eliminara una sola barra o un solo apoyo de una estructura isostática estable, esta se transformaría inmediatamente en un mecanismo o sistema hipostático, perdiendo su capacidad para soportar cargas y colapsando bajo su propio peso. Por el contrario, la adición de barras o vínculos adicionales la convertiría en hiperestática, donde el exceso de ligaduras hace que las ecuaciones de la estática sean insuficientes para

resolver el sistema, requiriendo el estudio de la compatibilidad de deformaciones y las propiedades elásticas de los materiales.

## Análisis de Estabilidad y Determinación Estática

La clasificación de una armadura como isostática, hiperestática o hipostática depende de la relación numérica entre sus nudos, barras y reacciones externas. Este análisis se divide tradicionalmente en isostaticidad externa e interna (Hibbeler, 2010).

### Isostaticidad Exterior

Se refiere a la suficiencia de los apoyos o vínculos externos para inmovilizar la estructura como un todo frente a cualquier sistema de fuerzas. Un sistema plano requiere un mínimo de tres restricciones independientes para evitar traslaciones en los ejes  $x$  e  $y$  y rotaciones en el plano (ver Tabla 8).

**Tabla 8: Condición de estabilidad**

Número de Reacciones (r)	Clasificación Exterior	Condición de Estabilidad
$r <$	Inestable / Hipostática	La estructura puede moverse libremente como sólido rígido.
$r =$	Isostática	Las reacciones pueden calcularse con $\sum F_x, \sum F_y, \sum M = 0$

$r >$	Hiperestática	Existen apoyos redundantes o superabundantes.
-------	---------------	---

Es vital notar que incluso con una estructura puede ser inestable si las reacciones son concurrentes en un punto o paralelas entre sí, permitiendo el movimiento rotacional o traslacional, respectivamente.

### Isostaticidad Interior y Grado de Hiperestaticidad

La isostaticidad interna analiza si la disposición de las barras es suficiente para mantener la rigidez de la malla. Para una armadura de  $n$  nudos y  $b$  barras, considerando  $r$  reacciones, la fórmula general del Grado de Hiperestaticidad ( $GH$ ) en estructuras planas es:

$$GH = b + r - 2n$$

En este contexto, la condición necesaria para la isostaticidad es que  $GH = 0$ , lo que implica que  $b + r = 2n$ . Si la estructura tiene barras o apoyos en exceso (hiperestática); si le faltan elementos para ser rígida (hipostática o mecanismo).

En el caso de estructuras tridimensionales o espaciales, cada nudo proporciona tres ecuaciones de equilibrio de fuerzas ( $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z = 0$ ), por lo que la relación se ajusta a:

$$b + r = 3n$$

Donde  $r$  suele ser 6 para un isostatismo externo completo en el espacio. La verificación de estas fórmulas es el primer paso obligado en cualquier protocolo de análisis estructural, ya que define la metodología de resolución que el ingeniero debe adoptar.

## Metodologías Analíticas de Resolución

Una vez confirmada la isostática de la estructura, se procede al cálculo de los esfuerzos axiales. Existen dos métodos analíticos principales y un método gráfico histórico que siguen siendo la base de la formación académica y profesional en ingeniería estructural.

### El Método de los Nudos

El método de los nudos se fundamenta en el equilibrio de cada articulación de la estructura considerada como un sólido libre. Dado que las fuerzas en una armadura son concurrentes en los nudos, el equilibrio en cada uno de ellos se reduce a un sistema de ecuaciones de traslación (Hibbeler, 2010).

El procedimiento estándar implica calcular primero las reacciones en los apoyos mediante el equilibrio global de la armadura. Posteriormente, se selecciona un nudo que no tenga más de dos incógnitas (fuerzas de barras desconocidas). Al aplicar  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$  en dicho nudo, se obtienen los valores de los esfuerzos en las barras concurrentes. Este proceso se repite secuencialmente de nudo en nudo hasta resolver toda la estructura. Una herramienta de gran utilidad en este método es la notación de Bow, que asigna letras a los espacios entre fuerzas y barras para facilitar el seguimiento visual y analítico del cálculo (Cervera & Blanco, 2002).

## El Método de las Secciones o de Ritter

Cuando solo se requiere conocer el esfuerzo en unas pocas barras específicas, el método de los nudos resulta tedioso. En estos casos, el método de Ritter permite "cortar" la estructura en dos porciones mediante una sección imaginaria que atraviese las barras de interés. Para que la porción aislada sea estáticamente determinada, la sección no debe cortar más de tres barras cuyas fuerzas sean desconocidas (Hibbeler, 2010).

Al aplicar las tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum F_x, \sum F_y, \sum M = 0$ ) a una de las partes de la armadura, se pueden despejar los esfuerzos internos. Una técnica común consiste en tomar momentos respecto al punto de intersección de dos de las barras cortadas, lo que permite hallar directamente el esfuerzo en la tercera barra. Este método es extremadamente potente para la verificación rápida de secciones críticas en puentes y grandes cubiertas.

## El método de Henneberg para estructuras complejas

Existen estructuras que cumplen la condición  $b + r = 2n$  pero que no pueden resolverse nudo a nudo ni mediante cortes simples de Ritter debido a su compleja geometría interna. Para estas "estructuras complejas", se utiliza el método de Henneberg, que consiste en sustituir una barra de la armadura por otra en una posición diferente que permita la resolución por métodos simples. Mediante la aplicación del principio de superposición y el análisis de la estructura bajo las cargas reales y una carga unidad ficticia, se determina el esfuerzo real en la barra original. Este método demuestra que la isostaticidad es una propiedad topológica que va más allá de la simple adición de triángulos.

## Tipologías de Armaduras de Puentes: Evolución y Eficiencia

La disposición de las barras internas en una armadura define su tipología y determina la eficiencia con la que el material resiste las cargas. Las configuraciones más comunes han evolucionado para aprovechar las propiedades específicas de materiales como la madera y el acero.

### Armaduras Pratt y Howe: La Dualidad Tensión-Compresión

Las armaduras Pratt y Howe son visualmente similares pero mecánicamente opuestas. En la armadura Pratt (1844), las diagonales se inclinan hacia el centro del vano, lo que provoca que, bajo cargas gravitatorias, las diagonales trabajen a tracción y los montantes verticales a compresión. Esto es ideal para el acero, ya que los elementos más largos (diagonales) son inmunes al pandeo cuando están en tensión (Meriam y Kraige, 2014).

Por el contrario, en la armadura Howe, las diagonales trabajan a compresión y los montantes a tracción. Esta configuración fue la preferida en la era de los puentes de madera, donde era más sencillo fabricar uniones que resistieran la compresión simple entre los extremos de las vigas que diseñar anclajes de tracción complejos (ver Tabla 9).

**Tabla 9: Característica de armaduras Pratt y Howe**

Característica	Pratt Truss	Howe Truss
Orientación Diagonal	Hacia el centro (forma de V)	Hacia los apoyos (forma de A)

<b>Esfuerzo en Diagonales</b>	Tracción (predominante)	Compresión (predominante)
<b>Material Preferente</b>	Acero / Hierro	Madera
<b>Eficiencia</b>	Alta en luces medias (hasta 75 m)	Alta para materiales fuertes en compresión

## Armadura Warren: Simplicidad y Versatilidad

La armadura Warren se caracteriza por sus diagonales que forman triángulos equiláteros o isósceles, eliminando en muchos casos los montantes verticales. En este sistema, las diagonales alternan sucesivamente esfuerzos de tracción y compresión a medida que se avanza por el vano. Su principal ventaja es la simplicidad de fabricación, ya que utiliza menos miembros y nudos que las Pratt o Howe, lo que reduce los costos de mano de obra y mantenimiento. Es la tipología estándar para puentes ferroviarios de luces moderadas y para las vigas de celosía de los edificios industriales modernos (Hibbeler, 2010).

## Armaduras para Grandes Luces: Baltimore, K y Parker

Cuando la luz del puente supera los 100 metros, las armaduras simples pueden sufrir problemas de inestabilidad lateral o pandeo en sus barras de compresión debido a su gran longitud.

- **Armadura Baltimore:** Es una versión subdividida de la Pratt que incorpora montantes y diagonales auxiliares para reducir la longitud efectiva de las barras principales. Esto permite manejar cargas pesadas

concentradas, típicas del tráfico ferroviario, con mayor estabilidad.

- **Armadura K:** Utiliza una disposición donde las diagonales se conectan en el centro de los montantes verticales, formando una figura similar a la letra "K". Este diseño es excepcional para resistir esfuerzos cortantes y reducir el pandeo de los montantes, siendo muy común en puentes de gran envergadura y torres de grúa.
- **Armadura Parker:** Es una variante de la Pratt con un cordón superior curvo o poligonal. Al variar el peralte de la armadura según el diagrama de momentos flectores, se optimiza el uso del material, haciendo que los esfuerzos en los cordones sean más uniformes a lo largo del puente.

## Estructuras Articuladas en Edificación y Techumbres

En el ámbito de la arquitectura, las estructuras articuladas isostáticas permiten cubrir grandes espacios diáfanos como gimnasios, hangares y almacenes.

### Armadura Fink: El Estándar de las Cubiertas

La armadura Fink es, posiblemente, la tipología más utilizada para techos de viviendas y edificios comerciales con pendientes pronunciadas. Su diseño se basa en una serie de triángulos internos que subdividen los cordones superiores en tramos cortos, lo que minimiza el riesgo de pandeo bajo cargas de nieve o viento. Su economía radica en que la mayoría de sus barras internas trabajan a tracción, permitiendo el uso de perfiles metálicos muy ligeros (Meriam y Kraige, 2014).

### Otras Configuraciones de Techo

- **King Post y Queen Post:** Son las formas más elementales de armadura,

utilizadas para luces cortas (hasta 8-10 metros). El King Post utiliza un solo montante central, mientras que el Queen Post emplea dos, creando un espacio rectangular central que puede ser útil para ventilación o buhardillas.

- **Saw-tooth (Diente de Sierra):** Utilizada tradicionalmente en naves industriales, esta armadura asimétrica permite la instalación de ventanales en la cara más vertical (orientada al norte) para maximizar la iluminación natural sin ganancia térmica excesiva por radiación solar directa.
- **Tijera (Scissor Truss):** Diseñada para proporcionar un techo inclinado en el interior del edificio, permitiendo una mayor altura libre central sin necesidad de vigas de gran canto.

## Comparativa Técnica: Sistemas Isostáticos frente a Hiperestáticos

La elección de una estructura isostática no es fortuita; responde a criterios de diseño que priorizan la adaptabilidad ante agentes externos y la claridad en la distribución de esfuerzos.

## Respuesta ante Variaciones Térmicas y Asentamientos

Una de las ventajas más críticas de las estructuras isostáticas es su insensibilidad a las deformaciones impuestas. En una armadura hiperestática, si un apoyo se asienta unos milímetros o si el sol calienta un lado de la estructura más que el otro, la restricción de movimiento provoca la aparición de enormes tensiones internas que pueden superar las tensiones de diseño por carga viva (Cervera & Blanco, 2002). En una estructura isostática, estos fenómenos simplemente provocan un cambio en

la geometría del sistema (rotación o desplazamiento como sólido rígido) sin inducir esfuerzos adicionales en las barras. Por esta razón, los puentes de tramos isostáticos (como las vigas Gerber) son la solución preferida en terrenos de cimentación incierta o en climas con gradientes térmicos extremos.

## Redundancia y Seguridad Estructural

El talón de Aquiles de la isostaticidad es la falta de redundancia. En un sistema isostático, no existe una "segunda línea de defensa". Si una barra crítica (como el cordón inferior de un puente) falla debido a corrosión, impacto o fatiga, la estructura pierde su equilibrio estático y colapsa de forma súbita. Las estructuras hiperestáticas, al poseer vínculos superabundantes, pueden redistribuir las cargas hacia otros elementos en caso de fallo local, proporcionando un tiempo vital para la evacuación o la reparación. Esta característica, conocida como robustez estructural, es la razón por la que muchos códigos modernos exigen cierto grado de hiperestaticidad en edificios de gran concurrencia pública (Sánchez et al., 2020).

**Tabla 10: Estructuras Isostáticas e Hiperestáticas**

Parámetro	Isostática	Hiperestática
<b>Complejidad de Análisis</b>	Baja (solo estática)	Alta (estática + elasticidad)
<b>Sensibilidad a Apoyos</b>	Inmune a esfuerzos por asentamientos	Muy sensible; genera esfuerzos internos <sup>8</sup>

<b>Efectos Térmicos</b>	Dilatación libre sin tensión	Restricción genera tensiones térmicas
<b>Seguridad ante Fallo</b>	Crítica; sin redundancia	Alta; posee reserva de seguridad
<b>Costo Material</b>	Generalmente mayor por secciones robustas	Menor; permite secciones más esbeltas

## Aplicaciones Especiales: Grúas y Maquinaria de Elevación

Las estructuras articuladas isostáticas son el estándar en la fabricación de grúas torre, grúas pórtico y sistemas de elevación industrial.

### Grúas Torre y de Celosía

La pluma y la torre de una grúa están diseñadas como armaduras espaciales isostáticas. Esta elección permite maximizar la capacidad de carga en el extremo de la pluma minimizando el peso propio de la estructura. El diseño de celosía ofrece además una superficie mínima de resistencia al viento, factor crucial para evitar el vuelco de la grúa en condiciones climáticas adversas. Al ser isostáticas, el montaje y desmontaje de los tramos modulares no inducen tensiones residuales, garantizando que la grúa se comporte exactamente como predice el modelo matemático tras cada configuración.

## Grúas Pórtico para Construcción de Puentes

En la construcción de viaductos, se utilizan grúas pórtico con vigas de celosía isostáticas para lanzar las dovelas o vigas prefabricadas. Estos sistemas suelen ser isostáticos para adaptarse a las ligeras variaciones de nivel de las pilas del puente ya construidas sin que la maquinaria sufra deformaciones permanentes o tensiones excesivas en sus uniones soldadas o atornilladas.

## Perspectiva de Diseño: Del Cálculo Manual a la Era Digital

Históricamente, la isostaticidad era una necesidad impuesta por las limitaciones de cálculo. Ingenieros como Eiffel o Roebling proyectaban sistemas isostáticos porque eran los únicos que podían resolverse con precisión mediante reglas de cálculo y métodos gráficos como el de Cremona.

Hoy en día, el uso de software de Análisis de Elementos Finitos (FEA) ha eliminado la barrera del cálculo manual, permitiendo resolver estructuras con miles de grados de hiperestaticidad en segundos. Sin embargo, la isostaticidad sigue siendo una opción de diseño deliberada y sabia. Proyectar una estructura isostática es una forma de control de calidad: permite al ingeniero saber exactamente cómo fluyen las cargas a través de cada barra, facilitando la inspección y el mantenimiento. Un cambio inesperado en el comportamiento de una barra isostática es una señal inequívoca de daño estructural, mientras que en un sistema hiperestático, el daño puede quedar oculto por la redistribución de esfuerzos hasta que sea demasiado tarde (Sánchez et al., 2020).

Las estructuras articuladas isostáticas representan el equilibrio perfecto entre simplicidad conceptual y eficiencia mecánica. A través de la correcta aplicación de los principios de la estática y una comprensión profunda de las tipologías estructurales (Pratt, Howe, Warren, Fink, entre otras), el ingeniero puede diseñar soluciones que no solo salvan luces impresionantes con un consumo mínimo de material, sino que también ofrecen una durabilidad excepcional frente a factores ambientales como la temperatura y el movimiento de los apoyos.

La isostática no debe verse como una limitación del pasado, sino como una herramienta de precisión. En un mundo donde la sostenibilidad y la eficiencia de recursos son primordiales, la capacidad de las armaduras para trabajar en estados de esfuerzo puro (tracción o compresión) sigue siendo inigualable. El futuro de estos sistemas reside en la integración de nuevos materiales y en la optimización topológica asistida por computadora, que permitirá crear armaduras isostáticas aún más ligeras y resistentes, manteniendo siempre la claridad y seguridad que solo el equilibrio estricto puede proporcionar.

# Capítulo V

## Análisis técnico-científico de los principios de trabajo y energía en el diseño de estructuras isostáticas y su integración en la normativa peruana

La ingeniería estructural contemporánea se fundamenta en la capacidad de predecir con precisión el comportamiento cinemático y tensional de los sistemas bajo diversas solicitudes. Dentro de este vasto campo, los principios de trabajo y energía representan una de las herramientas más elegantes y versátiles para el análisis de estructuras estáticamente determinadas, permitiendo a los proyectistas calcular desplazamientos y rotaciones que los métodos puramente geométricos abordarían con mayor dificultad. Estos principios no solo constituyen una base teórica sólida, sino que se integran directamente en las exigencias de servicio del Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE) del Perú, específicamente en las normas E.020, E.060 y E.090, donde el control de deflexiones es un requisito imperativo para garantizar la funcionalidad y durabilidad de las obras.

### Fundamentos termodinámicos y la ley de conservación de la energía estructural

El estudio de los métodos energéticos en estructuras se deriva de la primera ley de la termodinámica, aplicada a cuerpos deformables en el

rango elástico. En un sistema cerrado y en equilibrio, el trabajo externo ( $W_{ext}$ ) realizado por un conjunto de fuerzas aplicadas gradualmente sobre una estructura se transforma íntegramente en energía interna de deformación ( $U$ ), siempre que el proceso sea isotérmico y cuasiestático. Esta equivalencia es la piedra angular que permite relacionar cargas externas con deformaciones internas (Cequeira, 2019).

Cuando una fuerza  $P$  se aplica a una estructura de manera gradual, partiendo desde un valor cero hasta su magnitud final, el trabajo realizado es igual al área bajo la curva carga-desplazamiento. Para materiales que siguen la ley de Hooke, esta relación es lineal, lo que resulta en la expresión clásica  $W = \frac{1}{2}P\Delta$ . Es crucial distinguir este escenario del trabajo realizado por una fuerza que ya estaba actuando a su máxima magnitud mientras ocurre un desplazamiento adicional causado por otra carga; en este último caso, el trabajo es simplemente el producto de la fuerza por el desplazamiento, representado geométricamente por un rectángulo en lugar de un triángulo.

La energía interna de deformación, por su parte, es el sumatorio de la energía almacenada en cada diferencial de volumen de la estructura debido a los esfuerzos internos de flexión, tracción, compresión, cortante y torsión. En estructuras isostáticas como vigas simples, pórticos básicos y armaduras, estos esfuerzos internos pueden determinarse exclusivamente mediante las ecuaciones de equilibrio estático, lo que facilita enormemente el cálculo de la energía total sin necesidad de conocer previamente las deformaciones (ver Tabla 11).

**Tabla 11: Energía de deformación según componentes de esfuerzo**

Componente de Esfuerzo	Energía de Deformación (U)	Variables de Rigidez y Geometría
Carga Axial (Normal)	$U_a =$	Fuerza axial ( $N$ ), Rigidez axial ( $EA$ )
Flexión (Momento)	$U_f =$	Momento flector ( $M$ ), Rigidez a flexión ( $EI$ )
Esfuerzo Cortante	$U_v =$	Cortante ( $V$ ), Factor de forma ( $\kappa$ ), Rigidez a corte ( $GA$ )
Torsión (Torque)	$U_t =$	Momento torsor ( $T$ ), Rigidez torsional ( $GJ$ )

En la práctica peruana, la flexión suele ser el mecanismo dominante de almacenamiento de energía en vigas y pórticos, mientras que en armaduras metálicas o de madera, la energía axial es el factor determinante. El analista debe evaluar si los efectos de cortante son despreciables, lo cual suele ser aceptable en elementos esbeltos donde la longitud es significativamente mayor que el peralte de la sección.

## El principio del trabajo virtual y el método de la carga unitaria

El principio del trabajo virtual (PTV) es quizá la técnica más potente derivada de los conceptos energéticos para el cálculo de deflexiones elásticas en cualquier dirección y rotaciones en cualquier sección de una estructura. Este método se basa en la aplicación de un sistema virtual de fuerzas en equilibrio sobre una estructura que experimenta un conjunto real de desplazamientos compatibles.

Para determinar un desplazamiento específico  $\Delta$ , se aplica una carga unitaria virtual ( $P_{virtual} = 1$ ) en el punto y dirección deseados. El trabajo externo realizado por esta carga unitaria sobre el desplazamiento real es  $1 \cdot \Delta$ . Según el principio de conservación, este trabajo debe igualarse al trabajo interno realizado por los esfuerzos virtuales (causados por la carga unitaria) actuando a través de las deformaciones reales (causadas por las cargas externas). La formulación general resultante para una estructura sometida a múltiples tramos y esfuerzos es:

$$1 \cdot \Delta = \sum \int \frac{Mm}{EI} dx + \sum \int \frac{Nn}{EA} dx + \sum \int \frac{\kappa Vv}{GA} dx$$

Donde las variables en mayúsculas representan el "Estado Real" (cargas aplicadas a la estructura) y las minúsculas el "Estado Virtual" (carga unitaria aplicada en la dirección del desplazamiento buscado). Para el cálculo de giros o rotaciones ( $\theta$ ), se aplica un momento unitario virtual en lugar de una fuerza, manteniendo la misma lógica analítica.

En el contexto de la educación superior en ingeniería civil en el Perú, como en la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) o la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), este método es fundamental por su capacidad para manejar deformaciones no mecánicas. Por ejemplo, si un apoyo en una viga isostática experimenta un asentamiento, el trabajo virtual externo se ajusta para incluir el producto de la reacción virtual por dicho asentamiento, permitiendo calcular el desplazamiento en cualquier otro punto de la viga sin recurrir a complejas construcciones geométricas.

## Pasos metodológicos para la aplicación en vigas y pórticos isostáticos

El procedimiento sistemático para el cálculo de deflexiones mediante el trabajo virtual en el diseño estructural peruano sigue una serie de etapas críticas que garantizan la precisión del resultado:

1. Análisis del Sistema Real (Estado 0): Se determinan las reacciones y las leyes de esfuerzos internos (especialmente el momento flector) de la estructura bajo las cargas reales especificadas por la norma E.020.
2. Análisis del Sistema Virtual (Estado I): Se eliminan todas las cargas reales y se aplica una carga unitaria (adimensional o de  $1 \text{ kN/ton}$ ) en el punto donde se desea hallar la deflexión. Se obtienen las leyes de esfuerzos internos virtuales ( $m$ ).
3. Definición de Intervalos de Integración: Es imperativo que la estructura se divida en los mismos tramos para ambos estados. Cada corte o sección debe mantener el mismo origen de coordenadas ( $x$ ) para asegurar la compatibilidad de las funciones dentro de la integral.
4. Evaluación de la Integral: Se aplica la fórmula del trabajo virtual

- sumando las contribuciones de cada tramo. Si el resultado es positivo, el desplazamiento ocurre en el mismo sentido que la carga unitaria aplicada; si es negativo, el sentido es opuesto.
5. Conversión de Unidades: Dado que en el Perú se utilizan frecuentemente unidades de kilogramos, toneladas y metros, se debe prestar especial atención a la consistencia dimensional, especialmente al multiplicar el resultado por  $1/EI$  o  $1/EA$ .

Este método no se limita a estructuras lineales simples; su aplicación en pórticos isostáticos permite capturar el efecto combinado de los desplazamientos horizontales y verticales, algo vital para verificar la estabilidad de naves industriales metálicas diseñadas bajo la norma E.090.

## Teoremas de Castigliano: Derivación parcial de la energía

Alberto Castigliano proporcionó en 1876 una alternativa analítica basada en el cálculo diferencial que resulta sumamente eficiente para ciertos tipos de estructuras determinadas. Sus teoremas se enfocan en la energía interna de deformación total de la estructura.

El primer teorema de Castigliano se utiliza para hallar fuerzas, pero es el segundo teorema el que tiene una aplicación directa y constante en el cálculo de desplazamientos en estructuras determinadas. Este establece que la deflexión de una estructura en el punto de aplicación y en la dirección de una carga es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación total respecto a dicha carga (Beer et al., 2013).

Matemáticamente, para una fuerza  $P$ :

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Para un momento  $M$  (buscando una rotación  $\theta$ ):

$$\theta_M = \frac{\partial U}{\partial M}$$

En estructuras isostáticas sometidas a flexión, la expresión se simplifica al derivar dentro de la integral:

$$\Delta = \int \left( \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \right) dx$$

Esta formulación es equivalente al método de la carga unitaria, donde el término  $\frac{\partial M}{\partial P}$  cumple la misma función que el momento virtual  $m$ . La gran ventaja de Castiglano surge cuando se busca el desplazamiento en un punto donde ya existe una carga aplicada, permitiendo operar con variables algebraicas antes de sustituir los valores numéricos finales (West, 1984). Si el punto de interés no posee una carga, el ingeniero introduce una carga ficticia  $P_f$ , realiza la derivación parcial y finalmente iguala  $P_f$  a cero. Este "método de la carga ficticia" es una práctica común en los cursos de Análisis Estructural en universidades peruanas para resolver problemas de vigas con cargas distribuidas complejas donde el método de la carga unitaria podría requerir más pasos manuales.

## Propiedades de los materiales y rigidez estructural en el contexto peruano

La precisión de cualquier método energético depende críticamente de los parámetros de rigidez  $E$  (módulo de elasticidad),  $A$  (área) e  $I$  (momento de inercia). En el Perú, estos valores están estandarizados por el Reglamento Nacional de Edificaciones y las normas ASTM adoptadas.

El módulo de elasticidad del concreto ( $E_c$ ) es una variable dinámica que depende de la resistencia a la compresión  $f'c$ . Según la Norma E.060, para concreto de peso normal, se estima como  $E_c = 15,000\sqrt{f'c}$  en  $kg/cm^2$ . Es fundamental recordar que el concreto alcanza su resistencia de diseño típicamente a los 28 días, por lo que el cálculo de deflexiones inmediatas debe considerar el estado de madurez del material si se evalúan cargas de construcción (ver Tabla 12).

**Tabla 12: Propiedades de los materiales y rigidez estructural en el contexto peruano**

Material	Módulo de Elasticidad (E)	Coeficiente de Poisson (v)	Peso Unitario Típico
Concreto Armado	$15,000\sqrt{f'}$ $kg/cm^2$	0.15 –	$240 kg/m^3$
Acero Estructural	$2'000,00 kg/cm^2$	0.30	$785 kg/m^3$

Albañilería Sólida	Variable según unidad	$0.2\varepsilon$	$180 \text{ kg/m}^3$
Aluminio	$700,000 \text{ kg/cm}^2$	$0.3\varepsilon$	$275 \text{ kg/m}^3$

En el diseño de estructuras metálicas bajo la Norma E.090, se utilizan aceros certificados como el ASTM A36 o A572 Grado 50. El módulo de elasticidad del acero es mucho más predecible que el del concreto, situándose en  $200,000 \text{ MPa}$  ( $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ). Esta alta rigidez en comparación con su peso permite diseñar estructuras esbeltas, pero también hace que el control de deflexiones sea el estado límite que a menudo gobierna el diseño de vigas de grandes luces en centros comerciales o naves industriales.

Además de la rigidez axial y a flexión, el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) es necesario para calcular la rigidez al corte ( $G$ ), donde  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Para el concreto, se suele adoptar un valor de  $\nu = 0.15$  para fines de diseño de elementos estructurales comunes en el Perú.

## Límites de deflexión y estados límite de servicio en el RNE

El diseño estructural no concluye con garantizar que la estructura no se rompa (Resistencia); debe asegurar que la estructura sea útil y no genere desconfianza o daños en elementos no estructurales (Servicio). Los métodos energéticos son la herramienta estándar para verificar estos límites de

servicio impuestos por el Reglamento Nacional de Edificaciones (Beer et al., 2013).

### Límites en concreto armado (E.060)

La Norma E.060 es particularmente estricta en el control de deflexiones para evitar el agrietamiento excesivo que podría comprometer la durabilidad del refuerzo. Los límites se definen en función de la luz libre  $L$  del elemento.

- Deflexión inmediata por carga viva ( $L$ ): Para techos planos que no soportan elementos frágiles, el límite es  $L/180$ . Para pisos comunes, se reduce para asegurar el confort de los ocupantes.
- Deflexión total a largo plazo: Incluye la deflexión inmediata más las flechas diferidas por flujo plástico y contracción. Si la estructura soporta tabiquería frágil (como ladrillos de arcilla en edificios multifamiliares en Lima), el límite más riguroso es  $L/480$ .
- Control de fisuración: Para limitar el ancho de las grietas en vigas y losas, se debe verificar el parámetro  $Z = f_s \sqrt{d_c A_{ct}}$ , el cual no debe exceder los  $26$  kN/mm para condiciones de exposición normales.

### Límites en estructuras metálicas (E.090)

La Norma E.090 no establece una tabla única de deflexiones, remitiendo a menudo a la E.020 o a recomendaciones internacionales como las del AISC 360. Sin embargo, en la práctica peruana, se adoptan criterios funcionales claros:

- Vigas de piso: Comúnmente limitadas a  $L/360$  para carga viva y

$L/240$  para carga total.

- Vigas de techo con cobertura liviana: El límite puede relajarse  $L/180$ , pero se debe tener especial cuidado con la acumulación de agua (poceamiento) si la pendiente es menor al 3%.
- Puentes Grúa: Las vigas carrileras tienen límites mucho más estrictos (a menudo) debido a las tolerancias mecánicas de los equipos de izaje.

Es fundamental que el ingeniero considere el efecto del impacto en estructuras industriales. Según la E.020, las cargas vivas móviles deben incrementarse significativamente: un 100% para apoyos de ascensores, un 25% para tecles eléctricos y un 20% para maquinaria liviana. Estos incrementos aumentan la energía externa aplicada y, por ende, la deflexión calculada por el método de la carga unitaria.

## Reciprocidad de Maxwell-Betti y su importancia en la simetría estructural

Un concepto avanzado derivado de los principios de energía es el teorema de reciprocidad de Betti, que establece que el trabajo realizado por un sistema de cargas  $P_1$  durante los desplazamientos producidos por un sistema  $P_2$  es igual al trabajo de  $P_2$  durante los desplazamientos producidos por  $P_1$ .

Una aplicación simplificada es el teorema de Maxwell, que indica que el desplazamiento en el punto  $A$  debido a una carga unitaria en  $B$  es igual al desplazamiento en  $B$  debido a una carga unitaria en  $A$ . Aunque esto parezca una curiosidad teórica, es la base de la simetría de las matrices

de rigidez en el software de análisis estructural. Para el ingeniero que realiza verificaciones manuales en estructuras isostáticas, este teorema permite reutilizar cálculos de deflexiones en puntos simétricos, ahorrando tiempo y reduciendo errores en la integración de las funciones de momento (Mittelstedt, 2021).

## Integración con el método de los elementos finitos y software moderno

En la era actual, los ingenieros estructurales en el Perú utilizan herramientas como SAP2000, ETABS, SAFE y CSiBridge para modelar infraestructuras complejas. Todos estos programas operan bajo el Método de los Elementos Finitos (MEF), que es una extensión matricial de los principios energéticos.

El MEF discretiza la estructura continua en elementos pequeños. Para cada elemento, se definen funciones de forma que interpolan los desplazamientos. La matriz de rigidez del elemento se obtiene minimizando la energía potencial total, un principio variacional que busca el estado de equilibrio más estable. La relación fundamental  $\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$  no es más que una expresión masiva de los teoremas de Castigliano aplicados a miles de grados de libertad simultáneamente (West, 1984).

**Tabla 13: Manejo de energía según el software a emplear**

Software	Enfoque Principal	Conexión con Métodos Energéticos
SAP2000	Propósito general (Puentes, naves industriales, tanques)	Resolución de sistemas mediante MEF basado en energía potencial mínima.
ETABS	Edificaciones verticales de concreto y acero	Optimización de rigidez lateral y control de derivas (energía sísmica).
SAFE	Cimentaciones y losas de concreto	Análisis de flexión y punzonamiento mediante integración de energía en placas.
CSiBridge	Puentes e infraestructura vial	Evaluación de líneas de influencia y energía por cargas móviles.

La diferencia en cómo estos programas manejan la energía se observa en detalles operativos. Por ejemplo, SAP2000 y ETABS pueden arrojar resultados ligeramente distintos en el peso estructural y las deflexiones debido a cómo discretizan las uniones viga-columna y cómo distribuyen la energía de las cargas gravitacionales en los nudos. El ingeniero moderno debe entender que el software que ejecuta los principios de trabajo virtual de forma masiva, y la validación de esos resultados a menudo se hace

mediante cálculos manuales simplificados usando carga unitaria en secciones críticas (ver Tabla 13).

## Dinámica, sismo y disipación de energía

Aunque el análisis de estructuras determinadas se centra usualmente en el equilibrio estático, el concepto de energía es la clave para el diseño sismorresistente en el Perú, un país con altísima actividad sísmica. La Norma E.030 se basa en la capacidad de la estructura para absorber y disipar la energía cinética introducida por el movimiento del suelo.

Cuando un sismo golpea una estructura, esta almacena energía elástica hasta que alcanza su límite de fluencia. A partir de ahí, la energía debe disiparse a través de la formación de rótulas plásticas (trabajo inelástico). La ductilidad es la propiedad que permite este proceso sin que la estructura colapse. En estructuras metálicas (E.090), se busca que los perfiles tengan una elongación adecuada para "fluir" y consumir la energía sísmica. En concreto armado (E.060), se diseñan vigas con refuerzo transversal confinado para que puedan girar plásticamente en los extremos, disipando energía mientras las columnas permanecen esencialmente elásticas para sostener el peso del edificio (Criterio Columna Fuerte - Viga Débil).

Los disipadores de energía y aisladores sísmicos, tecnologías cada vez más comunes en hospitales y edificios esenciales en Lima, son dispositivos diseñados específicamente para concentrar el trabajo de deformación fuera de los elementos estructurales principales, protegiendo así la integridad global de la edificación (Aguiar et al., 2016).

## Aplicación práctica: Análisis de deflexión en una armadura Warren isostática

Considérese una armadura isostática de acero para un techo industrial en el Callao, con una luz de 20 metros. Se requiere calcular el desplazamiento vertical en el centro de la cuerda inferior bajo la carga de granizo y mantenimiento (kPa según E.020 para techos inclinados).

1. Cálculo de Fuerzas Reales ( $N$ ): Utilizando el método de los nudos, se determinan las fuerzas de tracción y compresión en cada una de las barras de la armadura debido a las cargas de servicio gravitacionales.
2. Cálculo de Fuerzas Virtuales ( $n$ ): Se aplica una carga descendente de 1 kN en el nudo central inferior. Se recalculan las fuerzas internas en todas las barras bajo esta única carga.
3. Evaluación Energética: Se utiliza la sumatoria de energía axial:

$$\Delta = \sum \frac{n \cdot N \cdot L}{A \cdot E}$$

Donde  $L$  es la longitud de cada barra,  $A$  su sección transversal y  $E$  el módulo de elasticidad del acero ( $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ).

4. Verificación de Servicio: Si el resultado supera el límite de  $L/240$  o  $L/360$  (según el uso del edificio y la presencia de cielorrasos frágiles), se procede a rediseñar las secciones. Aumentar el área  $A$  de las barras con mayores fuerzas virtuales  $n$  es la estrategia más eficiente energéticamente para reducir la deflexión global.

Este enfoque es fundamental para estructuras de grandes luces donde el peso propio puede ser una fracción menor de la carga total, y donde la rigidez (controlada por los métodos energéticos) es el factor dominante sobre la resistencia del material (Aguiar et al., 2016).

## Consideraciones sobre cargas ambientales y térmicas

El ingeniero peruano debe integrar en sus modelos energéticos los efectos ambientales que el RNE prescribe. La carga de nieve, especialmente en proyectos mineros en los Andes, no solo aumenta la energía de deformación por gravedad, sino que puede causar asimetrías en la carga (condición balanceada y desbalanceada según Art. 11 de la E.020) que deben verificarse para evitar fallas locales en correas de techo.

Asimismo, las fuerzas térmicas son críticas en estructuras metálicas expuestas. Un cambio de temperatura en una viga metálica de gran longitud genera un desplazamiento que, de estar restringido, produciría esfuerzos internos masivos. En estructuras isostáticas, estos movimientos suelen permitirse mediante apoyos deslizantes, pero el cálculo del desplazamiento térmico es un ejercicio directo de trabajo virtual donde la deformación real es  $\alpha \cdot L \cdot \Delta T$ .

Los principios de trabajo y energía no son meras abstracciones matemáticas; representan la esencia del comportamiento físico de las estructuras que sostienen la sociedad. En la ingeniería civil del Perú, la capacidad de dominar estos métodos separa al técnico que aplica fórmulas del ingeniero que comprende la respuesta estructural. Desde la validación de un complejo modelo en ETABS hasta la verificación rápida de una viga

de concreto en una supervisión de obra, los teoremas de Castiglano y la carga unitaria proporcionan la confianza técnica necesaria para cumplir con los estándares de seguridad y servicio del Reglamento Nacional de Edificaciones (West, 1984).

La evolución hacia una ingeniería más sostenible también encuentra apoyo en estos métodos. Al optimizar la rigidez mediante el análisis de energía de deformación, se reduce el consumo innecesario de materiales como el acero y el concreto, disminuyendo la huella de carbono de los proyectos sin comprometer su integridad. En última instancia, el manejo experto de la energía en el diseño estructural es el camino hacia una infraestructura más resiliente, económica y duradera para el desarrollo del país.

## Capítulo VI

# Teoría y Praxis del Método de Equilibrio y Rigidez en Estructuras Estáticamente Determinadas

El análisis de estructuras ha experimentado una transformación radical desde los métodos clásicos del siglo XIX hasta la sofisticación matricial y computacional del siglo XXI. En el núcleo de esta evolución se encuentra el método de rigidez, también conocido como método de desplazamientos, que se ha consolidado como el estándar universal para la resolución de sistemas estructurales, incluidos los estáticamente determinados o isostáticos. Aunque tradicionalmente la determinación estática sugería que el equilibrio era suficiente para obtener los esfuerzos internos, la aplicación del método de rigidez en estos sistemas revela una profundidad mecánica esencial para comprender el comportamiento elástico, las deformaciones y la estabilidad global de las obras de ingeniería civil.

## Evolución Histórica y el Surgimiento del Paradigma Matricial

La transición del análisis estructural a la rigidez matricial no fue un evento súbito, sino el resultado de décadas de refinamiento en la mecánica de sólidos. Antes de la era de la computación, los ingenieros dependían de métodos iterativos y de simplificaciones manuales para abordar la

complejidad de las estructuras (ver Tabla 14). Entre estos, el método de distribución de momentos de Hardy Cross, desarrollado entre 1930 y 1932, permitió resolver marcos hiperestáticos mediante aproximaciones sucesivas de equilibrio en los nudos, sin que el concepto de matriz de rigidez fuera explícitamente aparente para el calculista (Blanco et al., 2015). Otros métodos como los de Kani y Takabeya ampliaron estas capacidades, permitiendo el tratamiento de desplazamientos laterales y efectos de segundo orden de manera manual (Akaogi, 2017).

Sin embargo, la aparición de los computadores digitales entre 1950 y 1960 revitalizó el método de la rigidez en su implementación matricial. Este enfoque, que trata los desplazamientos en los nudos (traslaciones y rotaciones) como las incógnitas fundamentales, se adaptó perfectamente a la lógica algorítmica de las primeras máquinas de cómputo. En este contexto, el análisis de estructuras estáticamente determinadas dejó de ser una tarea puramente algebraica de resolución de fuerzas para integrarse en un sistema unificado donde el desplazamiento es el vehículo para el equilibrio (Hughes, 1987).

**Tabla 14: Evolución de teorías de análisis estructural**

Hito Histórico	Periodo	Contribución al Análisis Estructural
Teoría de la Elástica (Euler-Bernoulli)	Siglo XVIII	Relación entre curvatura, momento e inercia.

Métodos Energéticos (Castigiano, Maxwell)	Siglo XIX	Fundamentos de flexibilidad y teoremas de reciprocidad.
Método de Hardy Cross	1930-1932	Resolución iterativa de momentos en nudos rígidos.
Surgimiento del Análisis Matricial	1950-1960	Implementación en computadores digitales de la rigidez.
Desarrollo del Método de Elementos Finitos (MEF)	1960-Presente	Generalización de la rigidez para medios continuos.

## Fundamentos Mecánicos y Relaciones Constitutivas

El análisis de cualquier estructura, sea isostática o hiperestática, se rige por tres pilares fundamentales que deben cumplirse simultáneamente en cada punto del sistema. La violación de cualquiera de estos principios invalida la solución estructural.

### El Principio de Equilibrio Estático

El equilibrio constituye la ley fundamental de la estática y establece que la suma de fuerzas y momentos actuantes sobre un cuerpo en reposo debe ser nula. En el contexto estructural, este principio se aplica a la estructura completa, a cada nudo individual y a cualquier sección transversal de las barras. Para una estructura estáticamente determinada, las ecuaciones de equilibrio ( $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0$ ) proporcionan un número de ecuaciones igual al número de reacciones y

esfuerzos internos desconocidos, lo que permite su resolución sin considerar las propiedades del material en primera instancia (Moebs et al., 2021).

### La Condición de Compatibilidad Cinemática

La compatibilidad asegura que la deformación de la estructura sea una función continua y unívoca. Esto implica que las barras conectadas a un nudo deben experimentar los mismos desplazamientos y rotaciones que el nudo mismo. En estructuras isostáticas, la compatibilidad se utiliza para determinar la configuración deformada una vez conocidos los esfuerzos. El método de la rigidez invierte este proceso, garantizando la compatibilidad desde el inicio al definir el campo de desplazamientos como la variable primaria (Iriarte y Suárez, 2018).

### Leyes de comportamiento del material

Las leyes de comportamiento vinculan las fuerzas con las deformaciones. El supuesto más común en el análisis estructural es el régimen elástico lineal, gobernado por la Ley de Hooke, que establece una proporcionalidad directa entre la tensión y la deformación unitaria. El módulo de elasticidad longitudinal ( $E$ ) y el momento de inercia ( $I$ ) se combinan para definir la rigidez flexural ( $EI$ ), mientras que el área ( $A$ ) define la rigidez axial ( $EA$ ). Esta linealidad permite la aplicación del principio de superposición, esencial para descomponer cargas complejas en efectos elementales.

## Caracterización de la Rigidez y Grados de Libertad

La rigidez se define conceptualmente como la fuerza o par necesario para producir un desplazamiento o rotación unitaria en una coordenada específica, manteniendo restringidos todos los demás movimientos del sistema. En el análisis matricial, esta propiedad se cuantifica mediante coeficientes de rigidez ( $k_{ij}$ ), donde el subíndice  $j$  indica el grado de libertad donde se aplica el movimiento unitario e  $i$  indica la coordenada donde se mide la fuerza resultante.

## Identificación de Grados de Libertad (GL)

Los grados de libertad son los parámetros independientes que describen la posición deformada de los nudos. El número de GL define la dimensión de la matriz de rigidez global (ver Tabla 15). En estructuras isostáticas, la identificación precisa de los GL es vital para capturar movimientos como el ladeo en marcos o la deflexión en vigas simples (Aguiar, 2014).

**Tabla 15: Dimensión de la matriz global según grados de libertad**

Elemento Estructural	Grados de Libertad Locales	Coordenadas Representativas
Barra de Armadura	2 por nudo (4 total)	Traslaciones horizontales y verticales.
Viga (Modelo Euler)	2 por nudo (4 total)	Traslación vertical y rotación plana.

Pórtico Plano	3 por nudo (6 total)	Traslaciones X, Y y rotación Z.
Elemento Espacial	6 por nudo (12 total)	3 Traslaciones y 3 Rotaciones espaciales.

En estructuras con simetría, es posible reducir el número de grados de libertad utilizando apoyos monodeslizantes en el eje de simetría, lo que simplifica el cálculo sin perder precisión en la respuesta estructural.

### El Método de Rigidez en Estructuras Isostáticas

Aunque una estructura isostática puede resolverse mediante el método de las secciones, el método de rigidez ofrece ventajas significativas cuando se busca conocer las deflexiones o cuando se utiliza un enfoque computacional unificado. Para un sistema determinado, la matriz de rigidez no solo facilita la obtención de esfuerzos, sino que permite verificar los estados límite de servicio, fundamentales para la funcionalidad de la estructura (Meriam y Kraige, 2014).

### Transformación de Coordenadas Locales a Globales

Dado que los elementos de una estructura (como las barras de una armadura) suelen tener diferentes orientaciones, sus matrices de rigidez locales  $[k']$  deben transformarse a un sistema de coordenadas global  $[K]$  mediante una matriz de transformación  $[\mathbf{T}]$ . La relación matemática fundamental es:

$$K = T^T \cdot k' \cdot T$$

Este proceso de rotación asegura que las fuerzas y desplazamientos de cada barra se sumen coherentemente en los nudos de la estructura. En el caso de barras inclinadas, la matriz de transformación incorpora los cosenos directores ( $\cos \theta, \sin \theta$ ), relacionando la geometría global con el comportamiento mecánico intrínseco del material (Quispe, 2015).

### Ensamblaje de la Matriz de Rígidez Global

El ensamblaje es el proceso de superposición de las matrices de rigidez de cada elemento para formar la matriz maestra de la estructura. En una estructura isostática, antes de aplicar las condiciones de apoyo, esta matriz es singular, lo que indica que la estructura carece de vínculos externos y puede moverse como un sólido rígido. El equilibrio en los nudos se expresa como:

$$\{F\} = [K] \cdot \{\Delta\}$$

Donde  $\{F\}$  es el vector de fuerzas externas y  $\{\Delta\}$  es el vector de desplazamientos incógnitos. Para estructuras determinadas, la aplicación de las condiciones de contorno (eliminación de filas y columnas asociadas a desplazamientos nulos) resulta en un sistema de ecuaciones donde los desplazamientos se obtienen directamente, permitiendo luego la recuperación de las reacciones.

## El Principio de Contravarianza y la Dualidad Estática-Cinemática

Una de las contribuciones más profundas del análisis matricial a la ingeniería estructural es el principio de contravarianza. Este principio establece una relación de dualidad entre la matriz de equilibrio y la matriz de compatibilidad.

Si se define la matriz de equilibrio  $[A]$  que relaciona los esfuerzos internos  $\{s\}$  con las cargas externas  $\{Q\}$  como  $\{Q\} = [A]\{s\}$ , y la matriz de compatibilidad  $\{D\}$  que vincula los desplazamientos nodales  $\{D\}$  con las deformaciones de barra  $\{d\}$  como  $\{d\} = \{D\}$ , entonces se cumple que  $\{d\} = [A]^T \{s\}$ . En estructuras estáticamente determinadas, la matriz  $[A]$  es cuadrada e invertible, lo que simplifica enormemente la obtención de la matriz de rigidez global, la cual puede expresarse como:

$$[K] = [A] \cdot [k_{local}] \cdot [A]^T$$

Esta relación demuestra que la topología de la estructura (definida por  $[A]$ ) y las propiedades mecánicas de los elementos ( $[k_{local}]$ ) se sintetizan para determinar la rigidez total del sistema. El principio de los trabajos virtuales es la base física que sustenta esta igualdad matemática, garantizando que el trabajo realizado por las fuerzas externas sea igual a la energía de deformación interna (Blanco et al., 2012).

## Procedimiento Detallado para Vigas y Armaduras Isostáticas

Para resolver una estructura determinada mediante el método de rigidez, se sigue una secuencia lógica que minimiza errores y maximiza la eficiencia del cálculo.

1. **Discretización:** Se divide la estructura en elementos. En vigas, los nudos se sitúan en apoyos, puntos de carga puntual y donde existan discontinuidades en cargas distribuidas.
2. **Identificación del Sistema Q-D:** Se definen los grados de libertad globales. En una viga isostática de dos apoyos (uno fijo y otro móvil), el sistema Q-D incluye generalmente la rotación en ambos apoyos y la traslación horizontal en el apoyo móvil.
3. **Cálculo de Fuerzas de Empotramiento Perfecto (FEM):** Si hay cargas sobre las barras, se calculan los momentos y reacciones en un estado de "empotramiento total". Estas fuerzas se trasladan a los nudos con signo opuesto para formar el vector de cargas nodales equivalentes (Hibbeler, 2010).
4. **Generación de Matrices Locales:** Se calculan las matrices  $[k']$  para cada barra. Para vigas, se consideran términos como  $4EI/L$  y  $2EI/L$  para la flexión.
5. **Ensamble y Resolución:** Se construye la matriz  $[K]$  global y se resuelve el sistema  $\{\Delta\} = [K]^{-1} \cdot (\{Q\} - \{R\})$ , donde  $\{R\}$  representa el vector de fuerzas de empotramiento.
6. **Cálculo de Acciones Internas:** Con los desplazamientos conocidos, se aplican las ecuaciones de pendiente-deflexión o la rigidez elemental para hallar los momentos y cortantes finales en cada barra.

## Análisis de un Arco Triarticulado

El arco triarticulado es un sistema isostático emblemático en la ingeniería civil. A diferencia de una viga simple, el arco genera empujes horizontales en los apoyos ante cargas verticales debido a su geometría. El análisis por el método de rigidez de un arco requiere la discretización en múltiples elementos rectos o el uso de una matriz de rigidez para elementos curvos que integre los efectos axiales y de flexión (Cervera y Blanco, 2002). La estabilidad del arco depende de que las tres articulaciones (dos en los apoyos y una en la clave) no sean colineales, condición que se verifica mediante el análisis cinemático del sistema.

## Factores que Afectan la Rigidez: Wilbur y Muto

En el diseño de pórticos o marcos, la rigidez lateral es una propiedad crítica para la resistencia sísmica. El método de Wilbur asigna rigideces elementales basadas en la condición de los nudos (articulados o rígidos) y utiliza el parámetro  $\rho$  (índice de rotación) para clasificar la estructura (ver Tabla 16) (Casal, 1987).

**Tabla 16: Índice de rotación según el tipo de estructura**

Valor de $\rho$	Clasificación de la Estructura	Comportamiento Dominante
$\rho >$	Estructura de Corte	Las deformaciones por corte predominan sobre la flexión.
$\rho <$	Estructura de Flexión	El comportamiento es similar al de una viga en voladizo.

$0.01 < \rho <$	Zona Indefinida	El comportamiento mixto requiere análisis más detallado.
-----------------	-----------------	--

Estas fórmulas se fundamentan en la hipótesis de que los giros en los nudos de un nivel y de los niveles adyacentes son iguales, facilitando el cálculo de la rigidez lateral sin necesidad de resolver sistemas matriciales masivos en etapas preliminares del diseño. El método de Muto refina estos conceptos al considerar factores de corrección por la presencia de vigas de diferentes inercias, proporcionando una estimación más precisa de la rigidez en edificios reales.

## Implementación Computacional y Uso de Software

El análisis de estructuras estáticamente determinadas se apoya hoy en herramientas digitales que implementan el método directo de rigidez con gran precisión. Programas como Ftool, Robot Structural y SAP2000 son ampliamente reconocidos por su eficacia.

### Ftool y el Análisis Educativo

Ftool es una herramienta fundamental en las facultades de ingeniería de Perú (como la UNI y la PUCP) para la enseñanza de estructuras isostáticas. Permite realizar análisis estáticos de vigas y pórticos, calculando reacciones, desplazamientos y diagramas de esfuerzos internos de forma instantánea. Su capacidad para modelar cargas triangulares y puntuales sobre barras inclinadas lo hace ideal para validar cálculos manuales realizados mediante el método de las secciones o el equilibrio de nudos (Hibbeler, 2010).

## Software Profesional y BIM

En la práctica profesional, el software permite abordar estructuras grandes y complejas que serían inmanejables manualmente. Programas como SAP2000 y ETABS utilizan el método de rigidez para dimensionar puentes, presas y edificios, incorporando análisis dinámicos y sísmicos. La integración con la metodología BIM (Building Information Modeling) a través de herramientas como Revit y Tekla permite que el modelo analítico se sincronice con el modelo físico, optimizando el ciclo de vida de la infraestructura desde el diseño hasta la gestión de activos (Porras et al., 2015).

## El Análisis Estructural en la Academia Peruana: El Legado de la UNI y la PUCP

La formación de ingenieros civiles en el Perú tiene una tradición de rigor analítico que equilibra los métodos manuales con el software avanzado. El estudio de las estructuras isostáticas es el primer paso crítico en esta trayectoria.

### La contribución de Genaro Delgado Contreras

El Ing. Genaro Delgado Contreras, profesor emérito de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), ha sido una figura clave en la sistematización de la enseñanza estructural. Sus textos sobre análisis estructural y diseño sismorresistente enfatizan que una estructura debe poseer no solo resistencia, sino también la capacidad de deformarse y recuperar su forma original (resiliencia), propiedad que él identifica intrínsecamente con la rigidez. Sus apuntes sobre armaduras y vigas

isostáticas enseñan al alumno a visualizar las fuerzas internas como una respuesta al flujo de energía que recorre la estructura.

## El Enfoque en la PUCP y la UPC

En la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), el curso de Análisis Estructural I aborda detalladamente los sistemas isostáticos, incluyendo arcos, cerchas y pórticos en ménsula. Se fomenta el uso de los teoremas de Mohr y la ecuación de la elástica para comprender la deformación, antes de pasar a los métodos matriciales en cursos superiores. Por su parte, la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) alinea su currículo con las competencias ABET, enfocándose en la solución de problemas complejos mediante un razonamiento cuantitativo que integra el análisis manual con herramientas digitales desde etapas tempranas.

El método de rigidez se extiende naturalmente para abordar fenómenos que van más allá del equilibrio estático lineal. Incluso en estructuras isostáticas, estos efectos pueden ser determinantes.

## Análisis Dinámico y Matriz de Masa

Para evaluar la respuesta de una estructura ante sismos o vibraciones, se debe considerar el comportamiento inercial. El método de rigidez se complementa con una matriz de masa  $[M]$  y una de amortiguamiento  $[C]$ . El análisis modal resultante permite identificar las frecuencias naturales de vibración. Si una carga cíclica coincide con una de estas frecuencias, la estructura puede entrar en resonancia, provocando desplazamientos excesivos que pondrían en riesgo su estabilidad, aun cuando las fuerzas estáticas sean moderadas (Razo y Domínguez, 2020).

## Efectos Térmicos y Deformaciones Impuestas

Las variaciones de temperatura y los asentamientos de apoyos generan deformaciones que en estructuras isostáticas no inducen esfuerzos internos adicionales, pero sí alteran la geometría (Cervera y Blanco, 2002). El método de rigidez permite cuantificar estos desplazamientos con precisión. Por ejemplo, un aumento de temperatura en una barra de longitud  $L$  produce un alargamiento  $\alpha\Delta T L$ , el cual se incorpora al vector de desplazamientos para obtener la nueva configuración de equilibrio del sistema.

## El Futuro del Análisis Estructural: Algoritmos y Datos

La ingeniería civil del siglo XXI se sostiene tanto en algoritmos como en materiales. La transformación digital ha colocado al software en el corazón del diseño estructural. El ingeniero moderno ya no es solo un calculista, sino un analista de datos capaz de gestionar modelos complejos que simulan el comportamiento estructural ante eventos extremos como sismos severos o inundaciones.

La inteligencia artificial y el aprendizaje automático están comenzando a integrarse en el análisis estructural para predecir fallas y optimizar el mantenimiento preventivo. No obstante, la dependencia tecnológica plantea retos: la adopción de software requiere formación continua para evitar que la herramienta nuble el juicio profesional. El dominio de los métodos de equilibrio y rigidez en estructuras estáticamente determinadas sigue siendo, por tanto, la base indispensable para cualquier profesional que aspire a liderar proyectos de infraestructura con visión de futuro.

En síntesis, el método de equilibrio y rigidez trasciende su función como simple herramienta de cálculo para convertirse en un marco filosófico que explica cómo las estructuras resisten y se adaptan a su entorno. Desde la simplicidad de una viga isostática hasta la complejidad de un rascacielos, los principios de equilibrio, compatibilidad y comportamiento del material permanecen inalterados, garantizando la seguridad y el progreso de la sociedad a través de la ingeniería civil.

## Conclusión

Uno de los desafíos más profundos en la ingeniería estructural es la traducción de una realidad física compleja y continua en un modelo matemático discreto y manejable. Este proceso de idealización requiere formular suposiciones sobre las propiedades de los materiales, la geometría de los elementos y la naturaleza de las conexiones. La teoría clásica del análisis estructural se apoya en el principio de Saint-Venant, que permite determinar las tensiones en secciones normales de una pieza a partir de esfuerzos integrales, ignorando las perturbaciones locales en los puntos de aplicación de las cargas o en los apoyos.

En la realidad, las conexiones entre elementos rara vez son perfectamente articuladas o infinitamente rígidas. Sin embargo, para fines de análisis isostático, se categorizan en modelos ideales que restringen grados de libertad específicos y generan fuerzas reactivas proporcionales a dicha restricción.

La elección entre un modelo y otro depende del diseño constructivo. Por ejemplo, en estructuras de acero, las conexiones de cortante se idealizan como pasadores, mientras que las uniones soldadas o con placas de continuidad se tratan como nudos rígidos. En el concreto armado, la naturaleza monolítica del vaciado suele inducir una rigidez inherente que acerca el comportamiento a los marcos rígidos, lo cual tiene implicaciones críticas durante eventos sísmicos donde la ductilidad de la conexión es vital para la disipación de energía.

El análisis estructural convencional se sustenta en dos hipótesis simplificadoras: la linealidad elástica del material (Ley de Hooke) y la teoría de pequeñas deformaciones. Estas suposiciones permiten que la geometría de la estructura se considere invariable bajo carga, facilitando el uso de ecuaciones de equilibrio sobre la configuración original (Análisis de Primer Orden). Si las cargas llevan al material más allá del límite elástico o provocan desplazamientos significativos, el principio de superposición deja de ser válido, requiriendo análisis no lineales que escapan al ámbito de la estática elemental pero que son cruciales para evaluar la seguridad ante el colapso.

Las estructuras estáticamente determinadas se manifiestan en diversas tipologías que han evolucionado para satisfacer necesidades de vivienda, movilidad y servicios públicos. Cada sistema presenta una mecánica de transferencia de carga única que define su análisis y diseño. La validez del análisis estructural es directamente proporcional a la precisión con la que se estiman las cargas actuantes. Una estructura debe ser funcional, segura, económica y estética. Estas exigencias se traducen en la capacidad de resistir diversas acciones durante su construcción y vida útil.

En conclusión, la integridad de una estructura no solo se mide por su resistencia a la rotura, sino también por su rigidez. Las deformaciones excesivas pueden invalidar la funcionalidad de un edificio, provocando el agrietamiento de muros no estructurales, el mal funcionamiento de ascensores o una percepción de inseguridad en los ocupantes. En estructuras isostáticas, el cálculo de deflexiones es un paso esencial para verificar que se cumplen los límites de servicio. Métodos como la doble integración permiten obtener la ecuación de la elástica de una viga,

proporcionando una descripción completa de la pendiente y el desplazamiento en cada punto.

Finalmente, una de las afirmaciones más críticas del análisis de estructuras estáticamente determinadas es su intrínseca falta de redundancia. En un sistema isostático, no existen caminos alternativos para la carga si un elemento o una unión falla. La durabilidad de una estructura depende de su capacidad para resistir agentes externos a lo largo del tiempo. Las estructuras isostáticas, al permitir dilataciones libres por temperatura, suelen presentar menos problemas de agrietamiento por tensiones internas bloqueadas.

Por ende, su dependencia de un número reducido de apoyos exige un mantenimiento riguroso de los mismos. La inspección de materiales, la realización de pruebas de carga y el análisis de comportamiento ante la humedad son fases esenciales para asegurar que la capacidad portante no se degrade por debajo de los límites de diseño.

# Bibliografía

- Aguiar, R. (2014). *Análisis matricial de estructuras*. Quito: Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. [https://www.researchgate.net/profile/Roberto-Aguiar/publication/277301672\\_Analisis\\_Matricial\\_de\\_Estructuras\\_con\\_CE\\_INCI-LAB/links/5566061c08aec22682ff156d/Analisis-Matricial-de-Estructuras-con-CEINCI-LAB.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Roberto-Aguiar/publication/277301672_Analisis_Matricial_de_Estructuras_con_CE_INCI-LAB/links/5566061c08aec22682ff156d/Analisis-Matricial-de-Estructuras-con-CEINCI-LAB.pdf)
- Aguiar, R., Rodríguez, M., & Mora, D. (2016). *Análisis sísmico de estructuras con disipadores de energía ADAS o TADAS*. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña
- Akaogi, M. (2017). Clapeyron's Equation. In: White, W. (eds) Encyclopedia of Geochemistry. Encyclopedia of Earth Sciences Series. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-39193-9\\_301-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-39193-9_301-1)
- Alemán, T.W. (2024). *Estructuras isostáticas*. Barcelona: Marcombo
- Alvarado, J.A., Caro, J., Varela, J.B., & Hernández, O. (2012). *Estática y rotación del sólido*. Culiacán: Universidad Autónoma de Sinaloa. [https://dgep.uas.edu.mx/librosdigitales/5to\\_SEMESTRE/45\\_Estatica\\_y\\_Rotacion\\_del\\_Solido.pdf](https://dgep.uas.edu.mx/librosdigitales/5to_SEMESTRE/45_Estatica_y_Rotacion_del_Solido.pdf)
- Beer, F.P., Russell, J., & Mazurek, D.F. (2013). *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática*. New York: McGraw-Hill
- Berrocal, L. O. (2007). *Resistencia de materiales*. New York: McGraw-Hill
- Blanco, E., Cervera, M., & Suárez, B. (2015). *Análisis matricial de estructuras*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

<https://cervera.rmee.upc.edu/libros/Analisis%20Matricial%20Estructuras.pdf>

Blanco, J.L., González, A., & García, J.M. (2012). *Análisis estático de estructuras por el método matricial*. Málaga: Universidad de Málaga.  
[https://ingmec.ual.es/~jlblanco/papers/blanco2012calculo\\_matricial\\_estructuras.pdf](https://ingmec.ual.es/~jlblanco/papers/blanco2012calculo_matricial_estructuras.pdf)

Casal, J. (1987). *Métodos para el análisis de estructuras sujetas a fuerzas sísmicas laterales*. Buenos Aires: Instituto Nacional de Prevención Sísmica.  
<https://www.inti.gob.ar/publicaciones/descargac/172>

Cervera, M., & Blanco, E. (2002). *Mecánica de estructuras*. Barcelona: Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya.  
[https://cervera.rmee.upc.edu/libros/Mec%C3%A1nica\\_de\\_estructuras\\_II\\_Analisis\\_de\\_Estructuras.pdf](https://cervera.rmee.upc.edu/libros/Mec%C3%A1nica_de_estructuras_II_Analisis_de_Estructuras.pdf)

Ceuqeira, J.A. (2019). *Termodinámica: Apunte didáctico*. Posadas: Universidad Nacional de Misiones

Colina Martínez, J.D., & Ramírez de Alba, H. (2000). La ingeniería estructural. *Ciencia ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva*, 7(2). <https://www.redalyc.org/pdf/104/10401812.pdf>

Cudmani, R.O. (2007). *Teoría y práctica de las estructuras de barras*. Salta: Universidad Católica de Salta

España León, Á. R., González Valero, M. I., Mejía Viteri, J. T., Campi Mayorga, J. A., & Campi Mayorga, I. I. (2016). Patrón MVC, un componente para la implementación de una Estrategia Informática para mejorar gestión de datos en el área de estadística: Caso de Estudio Hospital Maternidad

Babahoyo. Uniandes Episteme. *Revista digital de Ciencia, Tecnología e Innovación*, 3(4), 561-574.

<https://www.redalyc.org/pdf/5646/564677242010.pdf>

García, L. M., Navarrete, T.D., & Rocha, J.Á. (2003). *Fuerza y Equilibrio*. Naucalpan: Innovación Editorial Lagares de México

Geoffrey J.M. (2005). *All Possible Worlds: A History of Geographical Ideas*. Oxford: Oxford University Press

Guardia, A. (2025). Estabilidad polinomial y análisis numérico de un sistema acoplado de ondas con término disipativo débil. (2025). *Pesquimat*, 28(1), 52-

65. <https://doi.org/10.15381/pesquimat.v28.i1.30936>

Hibbeler, R.C. (2010). *Ingeniería Mecánica: Estática*. México: Pearson Educación

Hughes, T.J.R. (1987). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey: Prentice Hall

Iriarte, M.A., & Suárez, R. (2018). *Hormigón Estructural*. Santa Cruz de la Sierra: Iriarte Saavedra, Marcelo Augusto.

<https://www.scribd.com/document/465376155/H%C2%BA-Estructural-Iriarte-y-Suarez-2018-pdf>

Janssen, M., Zuidema, J., & Wanhill, R. (2024). *Fracture Mechanics: An Engineering Primer*. TU Delft OPEN Books. <https://doi.org/10.59490/tb.86>

Meriam, J.L., & Kraige, L.G. (2014). *Mecánica para ingenieros: Estática*. Barcelona: Reverte

Mittelstedt, C. (2021). Introducción. En: Mecánica Estructural en Ingeniería Ligera. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75193-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75193-7_1)

Moebs, W., Ling, S., & Sanny, J. (2021). *Física Universitaria*. Houston: Rice University. <https://openstax.org/details/books/f%C3%ADscica-universitaria-volumen-1>

Porras-Díaz, H., Sánchez-Rivera, O.G., Galvis-Guerra, J.A., Jaimez-Plata, N.A., & Castañeda-Parra, K.M. (2015). Tecnologías “Building Information Modeling” en la elaboración de presupuestos de construcción de estructuras en concreto reforzado. *Entramado*, 11(1), 230-249. <https://www.redalyc.org/pdf/2654/265440664017.pdf>

Quispe, A. (2015). *Análisis Matricial de Estructuras*. Lima: Editorial Macro Razo Carrasco, D.G., & Domínguez, O.G. (2020). Evaluación integral de la seguridad estructural de edificaciones existentes dañadas por sismos de gran magnitud. *Revista Ingeniería Sísmica*, (104), 51–71. <https://doi.org/10.18867/ris.104.565>

Rupay Vargas, M. J., Chavez Ortiz, F. L., Tacunan Palacios, C. A., Cornejo Flores, M. A., & Torres Berrocal, L. (2022). Análisis sísmico de fuerzas estáticas equivalentes de un pórtico de 3 niveles. *Yotantsipango*, 2(2). <https://doi.org/10.54288/yotantsipango.v2i2.24>

Sánchez-Beitia, S., Gómez Genua, M.E., & y Luengas Carreño, D. (2020). *Estabilidad e Isostática en la Arquitectura*. Madrid, Spain: Ediciones Díaz de Santos

Vázquez, M. & López, E. (2001). *El método de los elementos finitos*. Madrid: Noela

Vielma, J.C., Barbat, A.H., & Oller, S. (2007). Respuesta no lineal de edificios de concreto armado diseñados para baja ductilidad. *Boletín Técnico*, 45(2), 12-34

West, H.H. (1984). *Análisis de Estructuras*. Ciudad de México: CECSA

De esta edición de “*Análisis estructural estáticamente determinadas*”, se terminó de editar en la ciudad de Colonia del Sacramento en la República Oriental del Uruguay el 23 de enero de 2026

EDITORIAL MAR CARIBE



---

# ANÁLISIS ESTRUCTURAL ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

ISBN: 978-9915-698-61-8

A standard one-dimensional barcode representing the ISBN 978-9915-698-61-8.

9 789915 698618