

POR: JORGE LUIS ROJAS ORBEGOSO, RAPHAEL SANTIAGO MENDOZA DELGADO, JENNY MARIA RUIZ SALAZAR, JORGE LUIS ILQUIMICHE MELLY, ROBERT WILLIAM CASTILLO ALVA, JORGE AMADOR LOPEZ HERRERA, ENIO ELIAS TENA JACINTO

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON SINTAXIS EN R:

Crecimiento exponencial,
logístico y modelo
depredador-presa

EST. 2021 **EMC**
EDITORIAL MAR CARIBE

WWW.EDITORIALMARCARIBE.ES

ISBN: 978-9915-698-20-5



Ecuaciones diferenciales ordinarias con sintaxis en R: Crecimiento exponencial, logístico y modelo depredador-presa

Jorge Luis Rojas Orbegoso, Raphael Santiago Mendoza Delgado, Jenny Maria Ruiz Salazar, Jorge Luis Ilquimiche Melly, Robert William Castillo Alva, Jorge Amador Lopez Herrera, Enio Elias Tena Jacinto

Jorge Luis Rojas Orbegoso, Raphael Santiago Mendoza Delgado, Jenny Maria Ruiz Salazar, Jorge Luis Ilquimiche Melly, Robert William Castillo Alva, Jorge Amador Lopez Herrera, Enio Elias Tena Jacinto, 2025

Primera edición: Julio, 2025

Editado por:

Editorial Mar Caribe

www.editorialmarcaribe.es

Av. General Flores 547, Colonia, Colonia-Uruguay.

Diseño de portada: Yelitza Sánchez Cáceres

Libro electrónico disponible en:

<https://editorialmarcaribe.es/ark:/10951/isbn.9789915698205>

Formato: electrónico

ISBN: 978-9915-698-20-5

ARK: [ark:/10951/isbn.9789915698205](https://editorialmarcaribe.es/ark:/10951/isbn.9789915698205)

Atribución/Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional:

Los autores pueden autorizar al público en general a reutilizar sus obras únicamente con fines no lucrativos, los lectores pueden utilizar una obra para generar otra, siempre que se dé crédito a la investigación, y conceden al editor el derecho a publicar primero su ensayo bajo los términos de la licencia [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

Editorial Mar Caribe, firmante N° 795 de 12.08.2024 de la [Declaración de Berlín](#):

"... Nos sentimos obligados a abordar los retos de Internet como medio funcional emergente para la distribución del conocimiento. Obviamente, estos avances pueden modificar significativamente la naturaleza de la publicación científica, así como el actual sistema de garantía de calidad..." (Max Planck Society, ed. 2003., pp. 152-153).

[Editorial Mar Caribe-Miembro de OASPA:](#)

Como miembro de la Open Access Scholarly Publishing Association, apoyamos el acceso abierto de acuerdo con el código de conducta, transparencia y mejores prácticas de [OASPA](#) para la publicación de libros académicos y de investigación. Estamos comprometidos con los más altos estándares editoriales en ética y deontología, bajo la premisa de «Ciencia Abierta en América Latina y el Caribe».



OASPA

Sobre los autores y la publicación

Jorge Luis Rojas Orbegoso

 <https://orcid.org/0000-0002-5688-4963>

Universidad Nacional del Callao, Perú

Raphael Santiago Mendoza Delgado

 <https://orcid.org/0009-0003-3679-0809>

Universidad Nacional del Callao, Perú

Jenny Maria Ruiz Salazar

 <https://orcid.org/0000-0001-9882-3133>

Universidad Nacional Federico Villarreal, Perú

Jorge Luis Ilquimiche Melly

 <https://orcid.org/0000-0001-5974-1979>

Universidad César Vallejo, Perú

Robert William Castillo Alva

 <https://orcid.org/0009-0002-5258-3319>

Universidad Nacional del Callao, Perú

Jorge Amador Lopez Herrera

 <https://orcid.org/0000-0001-5506-8406>

Universidad Nacional del Callao, Perú

Enio Elias Tena Jacinto

 <https://orcid.org/0000-0003-0585-9407>

Universidad Nacional del Callao, Perú

Resultado de la investigación del libro:

Publicación original e inédita, cuyo contenido es el resultado de un proceso de investigación realizado antes de su publicación, ha sido doble ciego de revisión externa por pares, el libro ha sido seleccionado por su calidad científica y porque contribuye significativamente al área del conocimiento e ilustra una investigación completamente desarrollada y completada. Además, la publicación ha pasado por un proceso editorial que garantiza su estandarización bibliográfica y usabilidad.

Sugerencia de citación: Rojas, J.L., Mendoza, R.S., Ruiz, J.M., Ilquimiche, J.L., Castillo, R.W., Lopez, J.A., y Tena, E.E. (2025). *Ecuaciones diferenciales ordinarias con sintaxis en R: Crecimiento exponencial, logístico y modelo depredador-presa*. Colonia del Sacramento: Editorial Mar Caribe. <https://editorialmarcaribe.es/ark:/10951/isbn.9789915698205>

Editorial Mar Caribe

**Ecuaciones diferenciales ordinarias con sintaxis en R:
Crecimiento exponencial, logístico y modelo
depredador-presa**

Colonia, Uruguay

2025

Índice

Introducción.....	6
Capítulo I.....	8
Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y su Importancia en la Modelación.....	8
1.1 Métodos de Resolución: Analíticos y Numéricos.....	9
1.2 Métodos de Euler: Sintaxis en R	15
1.3 Métodos Predictor-Corrector y Runge-Kutta en R: Implementación y Comparación para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	23
Capítulo II	30
Método predictor-corrector de tercer y cuarto orden de Adams	30
2.1 Descripción del método de tercer y cuarto orden de Adams	31
2.2 Correctores de Adams-Moulton en ecuaciones diferenciales ordinarias	35
2.3 Predictores de Adams-Bashforth: Fundamentos, Implementación y Aplicaciones en Métodos Numéricos.....	40
2.4 Modelo de Lotka-Volterra	47
Capítulo III	50
Método de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales.....	50
3.1 Fundamentos del Método de Taylor	50
3.2 Método de Ralston: Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con R.....	56
3.3 Ecuaciones explícitas de primer orden.....	63
3.4 Crecimiento logístico.....	67
Capítulo IV	70
Ecuaciones en las que la derivada aparece implícitamente.....	70
4.1 Ecuaciones explícitas e implícitas	71

4.2 Ecuación de Lagrange y Clairaut: Teoría y Aplicaciones Prácticas en R	75
4.3 Integrales Indefinidas en R: Métodos Básicos y Aplicaciones Prácticas	82
Conclusión	92
Bibliografía	94

Introducción

Este libro introduce, de forma integrada, la teoría, los métodos numéricos y la implementación computacional de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) utilizando R. Está dirigido a estudiantes, docentes e investigadores que buscan un puente claro entre el razonamiento matemático, la simulación confiable y el análisis reproducible, con énfasis en problemas reales donde la solución exacta raramente está disponible y la aproximación numérica se vuelve esencial.

Las EDOs son un lenguaje universal para describir procesos dinámicos en el tiempo: crecimiento poblacional, interacción depredador–presa, cinética química, osciladores mecánicos, circuitos, epidemiología y más. No obstante, los métodos analíticos siguen siendo fundamentales, la realidad aplicada demanda resolver sistemas no lineales, rígidos o altamente oscilatorios, donde los algoritmos y las decisiones de modelización determinan la validez científica de las conclusiones. R proporciona un entorno abierto y extensible en el que conviven:

- Solución numérica fiable de EDOs (con detección automática de rigidez y métodos explícitos/implícitos) mediante paquetes como `deSolve`, con integración nativa a análisis estadístico, ajuste de parámetros y visualización.
- Metodologías modernas de control de calidad numérica, incluyendo estimación a posteriori del error y control del error global a través de métodos adjuntos, útiles cuando el rigor en la cuantificación de incertidumbre es determinante.
- Estrategias de calibración en contextos con pocos datos y ruido alto, como en biología de sistemas, donde enfoques alternancia estados–parámetros ofrecen robustez frente a la escasez de observaciones.

Este ecosistema convierte a R en un laboratorio computacional capaz de cerrar el ciclo completo: formular, simular, ajustar, validar y comunicar resultados de manera reproducible. Los métodos estándar pueden requerir pasos diminutos y, aun así, distorsionar amplitudes o fases si la elección del

integrador y los controles de paso no es cuidadosa. Este libro enfatiza diagnósticos prácticos, selección informada de métodos y verificación de invariantes, con ejemplos reproducibles en R, en sistemas rígidos. Aunque el foco del libro es el uso de solvers clásicos en R, las lecciones de trabajos recientes sobre ODEs neuronales rígidas enriquecen las buenas prácticas de modelización, elección de tolerancias y evaluación de sensibilidad.

Se invita al lector a discernir sobre la filosofía del libro:

- *Bases matemáticas sólidas*: formulación, existencia y unicidad, estabilidad local/global, y nociones elementales de bifurcaciones.
- *Competencia numérica*: selección de métodos según la naturaleza del problema (oscilatorio, rígido), control de tolerancias, estimación a posteriori del error y validación cruzada de soluciones.
- *Flujo de trabajo en R*: implementación reproducible, ajuste de parámetros en escenarios de datos escasos y ruidosos, y comunicación de resultados con criterios de calidad.

Además, cuando el propósito es inferir parámetros desde series temporales cortas, la estimación directa puede ser inestable; por ello se incorporan técnicas de colocation y procedimientos tipo EM que alternan estimación de estados y parámetros, mejorando la fidelidad del ajuste en escenarios de datos limitados. El objetivo de investigación, examinar herramientas conceptuales y prácticas para transformar modelos diferenciales en evidencia cuantitativa fiable, con R como vehículo, donde se integran simulación, ajuste y validación en un entorno unificado, abordando con realismo los retos de oscilaciones, rigidez y datos limitados, y apoyándose en métodos de control de error que dan trazabilidad a las conclusiones.

Capítulo I

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y su Importancia en la Modelación

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son herramientas matemáticas fundamentales que consienten describir la relación entre funciones y sus derivadas. Estas ecuaciones son esenciales para modelar una amplia variedad de fenómenos en diversas disciplinas, como la física, la biología, la economía y la ingeniería, entre otras. A partir de las EDO, podemos captar la dinámica de sistemas complejos y entender cómo cambian con el tiempo o bajo diferentes condiciones.

La importancia de las EDO radica en su capacidad para representar cambios en sistemas dinámicos. Así como, en biología, se utilizan para modelar el crecimiento de poblaciones, donde la tasa de cambio de la población puede depender de factores como la disponibilidad de recursos y la competencia. En física, las ecuaciones diferenciales son decisivos para describir el movimiento de partículas y la evolución de sistemas físicos bajo diversas fuerzas. En el ámbito económico, las EDO se aplican para predecir tendencias del mercado y evaluar la evolución de variables económicas en un período determinado.

Las EDO posibilitan simplificar y abstraer fenómenos complejos, facilitando el análisis y la simulación de escenarios. Gracias a su versatilidad, estas ecuaciones son una herramienta poderosa en la modelación matemática, proporcionando un marco que ayuda a los académicos y profesionales a formular hipótesis, realizar predicciones y tomar decisiones basadas en datos (Molina, 2017). Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son un componente fundamental en las matemáticas aplicadas y la modelación de fenómenos en diversas disciplinas. Una ecuación diferencial ordinaria es una relación matemática que involucra una función desconocida y sus derivadas. En términos generales, una EDO puede expresarse como:

$$[F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0]$$

donde y es la función desconocida de la variable independiente t , y $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son las derivadas de y respecto a t . El objetivo principal de una EDO es encontrar la función $y(t)$ que satisface la relación dada, así como las condiciones iniciales o de frontera que puedan estar presentes. Las EDO se clasifican principalmente en dos categorías: lineales y no lineales.

- i. *EDO Lineales*: Una EDO se considera lineal si puede expresarse en la forma:

$$[a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)]$$

donde $a_i(t)$ son funciones conocidas y $g(t)$ es una función que representa la entrada externa del sistema. Las EDO lineales son más sencillas de resolver y tienen soluciones que pueden ser combinadas linealmente.

- ii. *EDO No Lineales*: Por otro lado, una EDO es no lineal si no puede ser escrita en la forma anterior. Esto significa que al menos uno de los términos involucra productos de la función desconocida o sus derivadas, o cualquier otra función no lineal. Las EDO no lineales suelen ser más complejas y pueden presentar comportamientos como bifurcaciones o caos.

1.1 Métodos de Resolución: Analíticos y Numéricos

Existen dos enfoques principales para resolver EDO: los métodos analíticos y los métodos numéricos.

- i. *Métodos Analíticos*: Estos métodos buscan una solución exacta de la EDO y son aplicables en situaciones donde es posible encontrar

una expresión matemática cerrada. Ejemplos de métodos analíticos incluyen la separación de variables, el método de integración por partes y el uso de transformadas, como la transformada de Laplace. Sin embargo, las EDO más complejas o no lineales a menudo no admiten soluciones analíticas.

- ii. *Métodos Numéricos:* Ante la dificultad de resolver EDO de forma analítica, se emplean métodos numéricos que facultan aproximar la solución mediante algoritmos computacionales. Algunos de los métodos numéricos más comunes incluyen el método de Euler, el método de Runge-Kutta y el método de Adams-Bashforth. Estos métodos son especialmente útiles para simular sistemas dinámicos en los que las soluciones deben ser calculadas en intervalos de tiempo discretos. Comprender los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias es esencial para abordar problemas matemáticos complejos en diversas disciplinas.

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en R se puede llevar a cabo de manera efectiva utilizando paquetes diseñados específicamente para este propósito, uno de los más populares es el paquete `deSolve`, que proporciona una variedad de funciones que facilitan tanto la formulación como la resolución numérica de EDO (Mosquera, 2024). Para comenzar, es necesario instalar el paquete `deSolve` si aún no se encuentra en su entorno de R. Esto se puede hacer utilizando el siguiente comando:

R

```
install.packages("deSolve")
```

Una vez instalado, se debe cargar el paquete en la sesión de R con el siguiente comando:

R

```
library(deSolve)
```

Este paso es esencial para acceder a las funciones que nos facilitan trabajar con EDO. Las EDO se pueden representar en R mediante funciones que describen el sistema que se desea modelar. Generalmente, la forma estándar de una EDO es:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

donde y es la variable dependiente y t es la variable independiente. En R, esta ecuación se puede representar como una función. Conviene destacar, si deseamos modelar el crecimiento poblacional de una especie en función del tiempo, podemos definir la ecuación logística como sigue:

R

```
growth_model <- function(t, y, parameters) {  
  r <- parameters[1]  tasa de crecimiento  
  K <- parameters[2]  capacidad de carga  
  dy <- r * y * (1 - y / K)  ecuación logística  
  return(list(dy))  
}
```

En esta función, t es el tiempo, y es la población y $parameters$ es un vector que contiene los parámetros del modelo. Para ilustrar cómo resolver una EDO en R, consideremos un caso sencillo: la ecuación diferencial que describe la descomposición de un material radiactivo, que se puede expresar como:

$$\left[\frac{dN}{dt} = -\lambda N \right]$$

donde (N) es la cantidad de material en el tiempo (t) y (λ) es la constante de descomposición. Para resolver esta ecuación en R, se seguirán los siguientes pasos:

- i. *Definir la función que representa la EDO:*

R

```
decay_model <- function(t, N, params) {  
  lambda <- params[1]  
  dN <- -lambda * N  
  return(list(dN))  
}
```

- ii. *Establecer los parámetros y condiciones iniciales:*

R

```
params <- c(lambda = 0.1)  constante de descomposición  
N0 <- 100  cantidad inicial  
times <- seq(0, 50, by = 1)  intervalo de tiempo
```

- iii. *Utilizar la función ode del paquete deSolve para resolver la EDO:*

R

```
results <- ode(y = N0, times = times, func = decay_model, parms = params)
```

iv. Finalmente, graficar los resultados:

R

```
plot(results[, "time"], results[, "N"], type = "l", col = "blue", xlab = "Tiempo",  
ylab = "Cantidad de material", main = "Descomposición Radiactiva")
```

Este ejemplo práctico demuestra cómo implementar y resolver una EDO simple utilizando R y el paquete deSolve. La flexibilidad de R y sus herramientas faculta a los académicos y estudiantes explorar una amplia variedad de modelos de EDO en diferentes disciplinas, facilitando el análisis y la visualización de datos. Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son herramientas fundamentales en la modelación de fenómenos en diversas disciplinas, su capacidad para describir sistemas dinámicos las convierte en un recurso esencial en campos como la biología, la física y la economía.

En biología, una de las aplicaciones más comunes de las EDO es el modelado del crecimiento poblacional. La famosa ecuación logística, que describe cómo una población crece en un entorno con recursos limitados, es un ejemplo clásico. Esta EDO se expresa como:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde $P(t)$ es la población en el tiempo t , r es la tasa de crecimiento intrínseca, y K es la capacidad de carga del medio ambiente. Este modelo faculta a los biólogos predecir cómo variará una población en un período, considerando factores como la competencia y la disponibilidad de recursos.

En física, las EDO son esenciales para describir el movimiento de partículas y sistemas dinámicos. Un ejemplo clásico es la ecuación de movimiento de un objeto bajo la influencia de la gravedad, que se puede expresar mediante la segunda ley de Newton. La ecuación diferencial que describe la posición $x(t)$ de un objeto en caída libre es:

[

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

]

donde g es la aceleración debido a la gravedad. Al resolver esta EDO, se pueden obtener las trayectorias de los objetos en movimiento, lo que es crucial en áreas como la mecánica clásica y la ingeniería.

En economía, las EDO se utilizan para modelar dinámicas de sistemas económicos y hacer predicciones sobre el comportamiento de variables clave. Un ejemplo notable es el modelo de Solow-Swan, que describe el crecimiento económico a largo plazo de un país (Álvarez y Álvarez, 2015). La ecuación diferencial que representa la acumulación de capital es:

[

$$\frac{dk}{dt} = s f(k) - \delta k$$

]

donde k es el capital por trabajador, s es la tasa de ahorro, $f(k)$ es la función de producción, y δ es la tasa de depreciación del capital. Este modelo faculta a los economistas analizar cómo las políticas de ahorro e inversión afectan el crecimiento económico en el tiempo. En contexto, las EDO son herramientas poderosas que facultan modelar y entender fenómenos complejos en diversas disciplinas. Su capacidad para describir

dinámicas temporales y predecir comportamientos hace que sean indispensables en la investigación científica y aplicada.

El uso de R para la resolución de EDO abre un abanico de posibilidades. La facilidad con la que se pueden instalar paquetes como deSolve y la accesibilidad de la sintaxis de R facilitan la implementación de modelos complejos y su análisis. La comunidad de usuarios y desarrolladores en R continúa creciendo, lo que promueve la creación de nuevas herramientas y métodos para abordar problemas que antes resultaban difíciles de resolver.

Es probable que veamos un aumento en la integración de técnicas de aprendizaje automático y análisis de datos con la modelación de EDO. Esto podría revolucionar la manera en que abordamos la resolución de ecuaciones en contextos de big data, permitiendo la identificación de patrones y la predicción de comportamientos en sistemas complejos. Asimismo, la colaboración interdisciplinaria será esencial. La combinación de conocimientos en matemáticas, programación y el dominio específico de cada área de aplicación será clave para avanzar en el estudio y la aplicación de las EDO.

Por lo que se espera que la comunidad siga desarrollando y compartiendo recursos educativos y ejemplos prácticos que faciliten el aprendizaje y la implementación de EDO en R. La creación de plataformas en línea y foros de discusión puede fomentar un intercambio enriquecedor de ideas y soluciones, impulsando así el progreso en este campo vital. En teoría, el trascender del estudio de las EDO con R es prometedor y está lleno de oportunidades para quienes deseen profundizar en el análisis y modelación de sistemas dinámicos.

1.2 Métodos de Euler: Sintaxis en R

Los métodos de Euler son técnicas fundamentales en el ámbito numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), que son ecuaciones que involucran funciones desconocidas y sus derivadas, la relevancia de estos métodos radica en su simplicidad y eficacia, permitiendo a científicos e ingenieros abordar problemas complejos que, de otro modo, serían intratables mediante métodos analíticos (Romero et al., 2001).

La esencia de los métodos de Euler radica en su capacidad para aproximar soluciones de EDOs a través de pasos discretos. En términos simples, estos métodos toman un valor inicial y, utilizando la pendiente de la función en ese punto, proyectan el valor de la función en un paso siguiente. Esta aproximación es especialmente valiosa en situaciones donde no se dispone de una solución cerrada, ya que faculta generar una serie de puntos que pueden ser analizados y visualizados.

Además de su aplicabilidad práctica, los métodos de Euler también sirven como puerta de entrada para el aprendizaje de técnicas más avanzadas de resolución de ecuaciones diferenciales. A partir de su estudio, estudiantes y profesionales pueden adquirir una comprensión más profunda de los conceptos subyacentes en la teoría de ecuaciones diferenciales y en el análisis numérico. Para comprender plenamente la aplicación y efectividad de los métodos de Euler, es esencial explorar algunos conceptos básicos que sustentan estas técnicas. Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que relacionan una función desconocida con sus derivadas. Estas ecuaciones son esenciales en diversas disciplinas, como la física, la ingeniería y la biología, donde se modelan fenómenos dinámicos. Las EDOs se clasifican principalmente en:

- i. *Orden:* Una EDO de orden n involucra derivadas hasta el n -ésimo orden. En particular, la ecuación $(y'' + y = 0)$ es de segundo orden.
- ii. *Linealidad:* Se dividen en lineales y no lineales. Una EDO lineal puede ser expresada en la forma $(a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x))$, donde $(a_i(x))$ y $(g(x))$ son funciones continuas de (x) .
- iii. *Homogeneidad:* Una EDO es homogénea si $(g(x) = 0)$, y no homogénea si $(g(x) \neq 0)$.

Existen varios métodos para resolver EDOs numéricamente, siendo los métodos de Euler los más simples y ampliamente utilizados. Se distinguen principalmente dos variantes:

- i. *Método de Euler Directo*: Este método se basa en la aproximación de la pendiente de la función en un punto dado para estimar el valor en el siguiente punto. Su fórmula se expresa como:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

donde (h) es el tamaño del paso, (t_n) es el valor actual de la variable independiente y $(f(t_n, y_n))$ es la derivada de la función en ese punto.

- ii. *Método de Euler Mejorado*: de igual manera conocido como el método de Heun, este método busca mejorar la precisión del método directo al realizar un cálculo adicional de la pendiente. Su fórmula es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot \left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + h \cdot f(t_n, y_n)) \right)$$

Los métodos de Euler son herramientas importantes en la resolución de ecuaciones diferenciales, y su comprensión básica es esencial para su implementación efectiva en la práctica, la implementación de los métodos de Euler en R es un proceso relativamente sencillo que faculta a los usuarios resolver ecuaciones diferenciales de manera eficiente (Cevallos y Cevallos, 2025). Antes de comenzar con la implementación, es importante asegurarse de tener instaladas las librerías que facilitarán el trabajo con datos y gráficos en R. Si bien los métodos de Euler se pueden implementar sin librerías

adicionales, usar herramientas como ggplot2 para la visualización de resultados puede ser muy útil. Para instalar y cargar la librería ggplot2, puedes usar el siguiente código:

R

```
install.packages("ggplot2")  Instalar ggplot2
```

```
library(ggplot2)            Cargar ggplot2
```

Es recomendable tener instalada la librería dplyr para el manejo de datos, aunque no es estrictamente necesaria para la implementación de los métodos de Euler.

R

```
install.packages("dplyr")  Instalar dplyr
```

```
library(dplyr)            Cargar dplyr
```

El método de Euler directo es el más básico de los métodos de Euler y se puede implementar mediante una función que reciba como parámetros la ecuación diferencial, el intervalo de tiempo, el valor inicial y el número de pasos. En seguida se presenta un ejemplo de cómo se puede definir esta función en R:

R

```
euler_directo <- function(f, y0, t0, tn, h) {
```

```
  n <- (tn - t0) / h      Número de pasos
```

```
  t <- seq(t0, tn, by = h) Vector de tiempos
```

```
  y <- numeric(n + 1)     Vector para almacenar resultados
```

```

y[1] <- y0          Valor inicial
for (i in 1:n) {
  y[i + 1] <- y[i] + h f(t[i], y[i])  Aplicar método de Euler
}
return(data.frame(t = t, y = y))  Retornar resultados como un data frame
}

```

En esta función, f es la función que define la ecuación diferencial, y_0 es el valor inicial, t_0 y t_n son los límites del intervalo de tiempo, y h es el tamaño del paso. El método de Euler mejorado, todavía conocido como método de Heun, proporciona una aproximación más precisa al calcular el valor de la pendiente en el inicio y el final de cada intervalo. En seguida se muestra una implementación en R:

R

```

euler_mejorado <- function(f, y0, t0, tn, h) {
  n <- (tn - t0) / h      Número de pasos
  t <- seq(t0, tn, by = h)  Vector de tiempos
  y <- numeric(n + 1)      Vector para almacenar resultados
  y[1] <- y0               Valor inicial
  for (i in 1:n) {
    y_pred <- y[i] + h f(t[i], y[i])  Predicción
    y[i + 1] <- y[i] + (h / 2) (f(t[i], y[i]) + f(t[i + 1], y_pred))  Corrección
  }
  return(data.frame(t = t, y = y))  Retornar resultados como un data frame
}

```

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) simple:

$$\left[\frac{dy}{dt} = y, \quad y(0) = 1 \right]$$

Esta ecuación representa un crecimiento exponencial. Para resolverla usando el método de Euler directo, primero definimos el paso de tiempo (h) y el número de pasos (n) que deseamos realizar.

R

Parámetros

`h <- 0.1` Tamaño del paso

`n <- 10` Número de pasos

`y <- numeric(n + 1)` Vector para almacenar los resultados

`y[1] <- 1` Condición inicial

`for (i in 1:n) {`

`y[i + 1] <- y[i] + h * y[i]`

`}`

`print(y)`

Al ejecutar este código en R, se obtendrá una aproximación de los valores de (y) en los diferentes instantes de tiempo. Siempre que se aumenta el número de pasos o se reduce el tamaño del paso (h) , la solución

se aproximará más a la solución exacta de la EDO, que es $y(t) = e^t$. Para ilustrar el método de Euler mejorado, utilizaremos la misma EDO:

```
\[  
\frac{dy}{dt} = y, \quad y(0) = 1  
\]
```

Sin embargo, en este caso, aplicaremos el método mejorado, que utiliza un enfoque de predicción-corrección:

R

Parámetros

h <- 0.1 Tamaño del paso

n <- 10 Número de pasos

y <- numeric(n + 1) Vector para almacenar los resultados

y[1] <- 1 Condición inicial

Implementación del método de Euler mejorado

```
for (i in 1:n) {
```

```
  y_pred <- y[i] + h * y[i]    Predicción
```

```
  y[i + 1] <- y[i] + (h / 2) * (y[i] + y_pred)    Corrección
```

```
}
```

```
print(y)
```

Este código permitirá observar cómo el método de Euler mejorado generalmente proporciona una aproximación más precisa de la solución real en comparación con el método directo. Al igual que antes, al aumentar el

número de pasos o reducir el tamaño del paso, se puede observar una mejora en la precisión de los resultados. Para comparar los resultados de ambos métodos, podemos graficar las soluciones obtenidas en función del tiempo. Esto nos permitirá visualizar las diferencias en precisión entre el método de Euler directo y el mejorado.

R

Comparación de resultados

```
time <- seq(0, n h, by = h)

plot(time, y, type = "o", col = "blue", ylim = c(0, 3), xlab = "Tiempo", ylab =
"y(t)", main = "Métodos de Euler")

lines(time, exp(time), col = "red", lty = 2) Solución exacta

legend("topright", legend = c("Euler Directo", "Euler Mejorado", "Solución
Exacta"), col = c("blue", "green", "red"), lty = c(1, 1, 2))
```

En esta gráfica, la línea azul representa los resultados del método de Euler directo, la línea verde los del método mejorado, y la línea roja la solución exacta. Se puede observar que el método mejorado se aproxima más a la solución exacta, evidenciando su eficacia en la resolución de ecuaciones diferenciales. Estos ejemplos prácticos muestran la implementación de los métodos de Euler en R y destacan la diferencia en la precisión entre el método directo y el mejorado, lo que refuerza la importancia de elegir el método adecuado según el problema a resolver.

Los métodos de Euler, tanto el directo como el mejorado, representan herramientas fundamentales en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. En primer lugar, es importante destacar que los métodos de Euler, si bien son relativamente sencillos y fáciles de implementar, presentan limitaciones en términos de precisión. El método de Euler directo, al ser un método de primer orden, puede generar errores significativos, especialmente en problemas donde la solución presenta rápidas variaciones (Alemu et al., 2025). Por otro lado, el método de Euler mejorado, que utiliza un enfoque de

predicción-corrección, ofrece una mejora notable en la precisión. Sin embargo, esto también implica un costo computacional adicional, lo que puede ser un factor a considerar en problemas de gran escala.

Nuestra recomendación para los usuarios de R es comenzar con el método de Euler directo para obtener una comprensión básica de la dinámica de las ecuaciones diferenciales. Esto no solo facilitará el aprendizaje de los conceptos subyacentes, sino que al igual permitirá establecer una base sólida sobre la cual se pueda construir al avanzar hacia el método mejorado. Es aconsejable realizar pruebas comparativas entre ambos métodos en diferentes tipos de ecuaciones diferenciales para evaluar cómo se comportan en diversas situaciones.

Por lo que se sugiere emplear librerías adicionales en R, como `ggplot2` para la visualización de resultados, que admiten una mejor interpretación de las soluciones obtenidas. La representación gráfica de las soluciones es esencial para validar la precisión de los métodos utilizados y para comunicar los resultados de manera efectiva. Por lo que es fundamental recordar que, si bien los métodos de Euler son herramientas útiles, existen otros métodos numéricos más avanzados, como el método de Runge-Kutta, que pueden ofrecer mayor precisión y estabilidad en ciertos contextos. Por lo tanto, es recomendable evaluar el problema específico y considerar la posibilidad de explorar alternativas si la precisión es un factor crítico en el análisis.

Los métodos de Euler proporcionan un enfoque accesible para la resolución de ecuaciones diferenciales y su implementación en R es un gran recurso para estudiantes y profesionales. Con las recomendaciones adecuadas y una comprensión clara de sus limitaciones, estos métodos pueden ser utilizados de manera efectiva en una amplia variedad de aplicaciones científicas y de ingeniería.

1.3 Métodos Predictor-Corrector y Runge-Kutta en R: Implementación y Comparación para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Los métodos numéricos son herramientas fundamentales para resolver problemas matemáticos complejos que no pueden abordarse de

manera analítica. En el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), estos métodos condescienden aproximar soluciones en situaciones donde las soluciones exactas son inviables. R, un lenguaje de programación ampliamente utilizado en estadística y análisis de datos, ofrece un entorno poderoso para implementar y resolver ODEs con la ayuda de varios métodos numéricos (Pérez et al., 2022).

Las ODEs son comunes en diversas disciplinas, incluyendo la física, la ingeniería, la biología y la economía, ya que modelan el comportamiento dinámico de sistemas en un período determinado. Sin embargo, muchas ODEs no tienen soluciones exactas, o estas son difíciles de encontrar. Los métodos numéricos ofrecen aproximaciones a estas soluciones, permitiendo a académicos y profesionales realizar simulaciones y análisis trascendentales para la toma de decisiones. Gracias a su capacidad para manejar problemas complejos, los métodos numéricos se han vuelto esenciales en la práctica y la investigación.

Dentro del ámbito de los métodos numéricos, los métodos predictor-corrector y los métodos de Runge-Kutta son dos enfoques prominentes para resolver ODEs. Los métodos predictor-corrector utilizan un enfoque en dos etapas: primero, se calcula una predicción inicial de la solución, y luego se realiza una corrección para mejorar la precisión de esta estimación. Este enfoque proporciona un balance entre rapidez de cálculo y precisión. Por otro lado, los métodos de Runge-Kutta, especialmente los de orden superior, son conocidos por su capacidad para ofrecer soluciones precisas con un número relativamente bajo de pasos de integración. Estos métodos son valorados en la resolución de ODEs debido a su robustez y facilidad de implementación.

Los métodos predictor-corrector son técnicas numéricas utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) mediante un enfoque iterativo que combina una predicción inicial de la solución con una corrección posterior para obtener resultados más precisos (Varona, 1996). Este enfoque es especialmente útil en situaciones donde es necesario equilibrar precisión y eficiencia computacional.

La base de los métodos predictor-corrector es simple: primero, se realiza una estimación (predicción) de la solución en un punto futuro

utilizando información de puntos anteriores. A esta estimación inicial se le conoce como "predicción". Posteriormente, se utiliza esta predicción para calcular un valor corregido que se considera más preciso. Este paso de corrección implica generalmente el uso de la derivada de la función en el punto predicho, permitiendo ajustar la solución de acuerdo con el comportamiento real de la función.

Existen diversas variantes de métodos predictor-corrector, siendo los más comunes el método de Euler hacia adelante como predictor y el método de Euler hacia atrás como corrector. Otros métodos más sofisticados, como el método de Adams-Bashforth y Adams-Moulton, también pertenecen a esta categoría y ofrecen mayor precisión al interpolar entre los puntos calculados. Para implementar un método predictor-corrector en R, es fundamental seguir ciertos pasos, que incluyen la definición de la ODE, la elección de un método de predicción y corrección, y la iteración sobre los pasos de tiempo. Supongamos que queremos resolver la ODE:

$$\left[\frac{dy}{dt} = f(t, y) \right]$$

donde $f(t, y) = y - t^2 + 1$ con la condición inicial $y(0) = 0.5$.

R

Definimos la función f

```
f <- function(t, y) {  
  return(y - t^2 + 1)  
}
```

Implementación del método predictor-corrector

```
predictor_corrector <- function(f, y0, t0, tf, h) {  
  n <- as.integer((tf - t0) / h) Número de pasos
```

```

t <- seq(t0, tf, by = h) Vector de tiempos
y <- numeric(n + 1) Vector de soluciones
y[1] <- y0 Condición inicial
for (i in 1:n) {
  Predicción usando el método de Euler
  y_pred <- y[i] + h * f(t[i], y[i])
  Corrección utilizando el método de Euler hacia atrás
  y[i + 1] <- y[i] + h * f(t[i + 1], y_pred)
}
return(data.frame(t = t, y = y))
}

Llamada a la función con los parámetros deseados
resultados <- predictor_corrector(f, y0 = 0.5, t0 = 0, tf = 2, h = 0.1)

Visualización de los resultados
plot(resultados$t, resultados$y, type = "l", col = "blue", xlab = "t", ylab = "y",
main = "Método Predictor-Corrector")

```

Este código implementa un método predictor-corrector básico en R, donde calculamos la solución de la ODE en un intervalo de tiempo definido. La gráfica resultante mostrará la evolución de la solución, permitiendo observar el comportamiento del sistema modelado. Los métodos predictor-corrector presentan varias ventajas. En primer lugar, ofrecen buena precisión sin necesidad de un alto número de pasos de tiempo, lo que es especialmente útil en problemas donde la evaluación de la función es costosa. Así, su estructura iterativa faculta la adaptación a diferentes tipos de problemas y condiciones iniciales.

Sin embargo, también presentan desventajas. La implementación puede ser más compleja en comparación con métodos más simples y, en algunos casos, la convergencia puede ser lenta, especialmente si la función tiene un comportamiento altamente no lineal. La elección inadecuada de los métodos de predicción y corrección puede llevar a inestabilidades numéricas. Total, los métodos predictor-corrector son herramientas poderosas en la resolución de ODEs, pero su aplicación efectiva requiere un conocimiento profundo de la naturaleza del problema a resolver y de las características de los métodos utilizados.

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de técnicas ampliamente utilizadas para resolver ODEs, ofreciendo una forma eficaz de aproximar soluciones con precisión controlada a partir de su orden de aproximación, los métodos de Runge-Kutta se pueden clasificar en diferentes órdenes, siendo el más común el método de cuarto orden (RK4) (Segarra, 2020). Este método es popular debido a su equilibrio entre complejidad computacional y precisión. En términos generales, un método de Runge-Kutta de orden n utiliza una combinación de evaluaciones de la función derivada en múltiples puntos dentro del intervalo de integración para calcular una aproximación más precisa a la solución de la ODE. Para una ODE de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, el método RK4 calcula la siguiente aproximación para $y(t+h)$ como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

- $k_1 = f(t_n, y_n)$
- $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1)$

$$- \left(k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2 \right) \right)$$

$$- \left(k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3) \right)$$

Esta fórmula faculta una aproximación de orden cuatro, lo que significa que el error global decrece a una tasa proporcional a (h^4) cuando se reduce el tamaño del paso (h) . Supongamos que queremos resolver la ODE simple $\left(\frac{dy}{dt} = -2y\right)$ con la condición inicial $(y(0) = 1)$.

R

Definimos la función que representa la ODE

```
f <- function(t, y) {  
  -2 * y  
}
```

Implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden

```
runge_kutta_4 <- function(f, y0, t0, tf, h) {  
  n <- ceiling((tf - t0) / h)  
  y <- numeric(n + 1)  
  t <- seq(t0, tf, by = h)  
  y[1] <- y0  
  for (i in 1:n) {  
    k1 <- f(t[i], y[i])  
    k2 <- f(t[i] + h / 2, y[i] + h / 2 * k1)  
    k3 <- f(t[i] + h / 2, y[i] + h / 2 * k2)  
    k4 <- f(t[i] + h, y[i] + h * k3)  
    y[i + 1] <- y[i] + (h / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)  
  }  
}
```

```

return(data.frame(t = t, y = y))
}

Ejecutamos la función
resultados <- runge_kutta_4(f, y0 = 1, t0 = 0, tf = 5, h = 0.1)

Graficamos los resultados
plot(resultados$t, resultados$y, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
      main = "Solución de la ODE usando Runge-Kutta de 4to orden",
      xlab = "Tiempo", ylab = "y(t)")

```

Este código define una función para el ODE, implementa el método RK4 y grafica la solución. Los resultados muestran cómo la solución se comporta en el tiempo, permitiendo visualizar la dinámica del sistema. Los métodos de Runge-Kutta, especialmente el de cuarto orden, ofrecen ventajas significativas sobre los métodos tradicionales, como el método de Euler. Aunque el método de Euler tiene un orden de convergencia de uno, los métodos de Runge-Kutta proporcionan una convergencia mucho más rápida, lo que se traduce en menos pasos de integración necesarios para alcanzar un nivel deseado de precisión. Esto es especialmente valioso en aplicaciones donde la precisión es crítica y se requiere un uso eficiente del tiempo computacional.

Sin embargo, es importante considerar que los métodos de Runge-Kutta pueden ser más costosos computacionalmente en términos de evaluaciones de la función, ya que requieren múltiples cálculos por paso. Así, la elección entre estos métodos dependerá del problema específico a resolver y de las restricciones de tiempo y recursos computacionales disponibles. Es decisivo resaltar que la elección del método adecuado para la solución de ODEs depende en gran medida del contexto específico del problema, así como de los requisitos de precisión y eficiencia. La comprensión de las características de cada método faculta a los usuarios de R tomar decisiones informadas que mejoren la calidad de sus resultados.

Se anticipa un crecimiento continuo en el uso de R para métodos numéricos, impulsado por la mejora constante en algoritmos y la integración de bibliotecas más sofisticadas. Este avance permitirá a los académicos abordar problemas más complejos y obtener soluciones aún más precisas en diversas aplicaciones científicas y tecnológicas. La combinación de R con métodos numéricos innovadores promete abrir nuevas fronteras en el análisis y modelado matemático.

Capítulo II

Método predictor-corrector de tercer y cuarto orden de Adams

El método predictor-corrector es una técnica fundamental en el campo de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, que faculta obtener soluciones aproximadas de manera eficiente y precisa. Este enfoque combina dos pasos esenciales: un paso de predicción, donde se estiman los valores futuros de la solución, y un paso de corrección, donde se ajustan esos valores utilizando información adicional para mejorar la precisión.

El método predictor-corrector se basa en una estrategia iterativa que utiliza fórmulas derivadas de métodos numéricos, como los de Adams, para predecir y luego corregir la solución de un problema de valor inicial. En la fase de predicción, se generan valores tentativos de la solución en puntos avanzados, pese a que en la etapa de corrección, estos valores son refinados mediante la evaluación de la función en los puntos predichos y sus derivadas (Marrero y Baguer, 2004). Esta dualidad faculta que el método sea adaptativo y capaz de manejar una variedad de situaciones en las que la precisión es crucial.

El desarrollo del método predictor-corrector se remonta a los trabajos pioneros en el siglo XIX sobre ecuaciones diferenciales y la búsqueda de soluciones numéricas. Uno de los hitos significativos en la evolución de estos

métodos fue el desarrollo de las fórmulas de Adams, que sirvieron como base para la creación de técnicas más avanzadas.

La capacidad de resolver ecuaciones diferenciales es crucial en numerosas disciplinas, incluidos la física, la ingeniería, la biología y la economía. Los métodos predictor-corrector, especialmente los de mayor orden, posibilitan abordar problemas complejos que no pueden resolverse analíticamente. Su flexibilidad y adaptabilidad los convierten en herramientas valiosas para los ingenieros y científicos que buscan modelar fenómenos del mundo real. Al ofrecer un balance entre precisión y eficiencia computacional, estos métodos se han vuelto esenciales en la simulación y el análisis numérico moderno, impulsando avances significativos en la investigación y la aplicación práctica.

2.1 Descripción del método de tercer y cuarto orden de Adams

El método de tercer orden de Adams, conocido como el método de Adams-Bashforth, es un enfoque de integración numérica que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Este método se basa en la idea de utilizar una serie de valores previamente calculados de la función para predecir el valor futuro de la solución. En particular, el método de tercer orden emplea un esquema de interpolación polinómica que utiliza tres puntos anteriores para estimar el punto siguiente. La fórmula general se puede expresar como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} \left(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2} \right)$$

donde (y_n) es la aproximación en el tiempo (t_n) , (h) es el tamaño del paso de tiempo, y (f_n) representa la evaluación de la función en (y_n) .

El método de tercer orden de Adams es ampliamente utilizado en diversas disciplinas de la ciencia y la ingeniería. Su aplicabilidad se extiende a la simulación de sistemas dinámicos, como en la mecánica de fluidos, donde las ecuaciones diferenciales representan el comportamiento del flujo. Así, se emplea en la modelización de procesos biológicos, como la difusión de sustancias químicas en un medio, y en la resolución de problemas de control en sistemas eléctricos.

Una de las ventajas del método es su capacidad para manejar problemas que presentan condiciones iniciales difíciles, donde se requiere una aproximación precisa desde el inicio. Para ilustrar, en la simulación de sistemas donde las condiciones cambian rápidamente, el método de tercer orden puede proporcionar resultados más fiables en comparación con métodos de primer o segundo orden. Entre las ventajas del método de tercer orden de Adams, se destaca su mayor precisión y eficiencia en comparación con métodos de menor orden, lo que facilita obtener soluciones más exactas con menos pasos de tiempo. Esto es especialmente valioso en problemas donde la precisión es crítica y el costo computacional es una consideración importante.

Sin embargo, el método de tercer orden de igual manera presenta limitaciones. Una de las principales desventajas es su dependencia de condiciones iniciales adecuadas; si los valores iniciales no se eligen correctamente, la precisión de las soluciones puede verse comprometida. Así, el método puede ser ineficiente en situaciones donde se requiere un alto grado de adaptabilidad en el tamaño del paso, ya que mantener un tamaño de paso constante puede no ser óptimo para todos los intervalos del problema. Por ende, el método de tercer orden de Adams es una herramienta poderosa en la resolución de ecuaciones diferenciales, ofreciendo un equilibrio entre precisión y eficiencia, si bien su aplicación efectiva depende de una cuidadosa consideración de las condiciones iniciales y la naturaleza del problema a resolver.

El método de cuarto orden de Adams, también conocido como el método de Adams-Bashforth de cuarto orden, es una técnica de integración numérica que facilita resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de la forma $y' = f(t, y)$. Este método se basa en la idea de extrapolar el

comportamiento futuro de la solución utilizando una combinación de los valores de la función en puntos anteriores (Segarra, 2020). En particular, el método de cuarto orden implica el uso de cuatro puntos previos para calcular una aproximación más precisa de la solución en el siguiente paso. La fórmula general del método de Adams-Bashforth de cuarto orden se expresa como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f(t_{n+1}, y_{n+1}) - 19f(t_n, y_n) + 5f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-2}, y_{n-2}))$$

donde (h) es el tamaño del paso y $(f(t_i, y_i))$ representa la evaluación de la función en los puntos correspondientes. Es fundamental que se disponga de los valores de (y) en los tres pasos anteriores para poder aplicar este método.

El método de cuarto orden de Adams ofrece ventajas significativas en comparación con su contraparte de tercer orden. En tanto que el método de tercer orden utiliza solo tres puntos previos en sus cálculos, el método de cuarto orden incorpora un cuarto punto, lo que resulta en una mayor precisión. Esto se traduce en que el error de truncamiento del método de cuarto orden es significativamente menor, lo que faculta que la solución converja más rápidamente hacia el valor real, especialmente en problemas donde la función $(f(t, y))$ cambia rápidamente.

Sin embargo, es importante destacar que, si bien el método de cuarto orden puede ser más preciso, al igual requiere un mayor esfuerzo computacional, ya que se debe calcular y almacenar un mayor número de puntos. Por lo tanto, la elección entre el método de tercer y cuarto orden debe basarse en una evaluación cuidadosa de las necesidades específicas del problema a resolver.

El método de cuarto orden de Adams es particularmente efectivo en casos donde se requiere una alta precisión en la solución de EDOs, como en

simulaciones de fenómenos físicos, modelado de sistemas dinámicos y en la ingeniería, donde la exactitud es crucial. En efecto, en la modelación de sistemas biológicos o en la ingeniería de control, donde se busca prever el comportamiento futuro de un sistema, el uso de un método de mayor orden como el de cuarto orden de Adams puede ser determinante para obtener resultados confiables.

Además, este método se puede combinar con técnicas de adaptación de pasos, lo que faculta ajustar dinámicamente el tamaño del paso (h) en función de las características de la solución a medida que se avanza en el tiempo. Esto no solo mejora la precisión, sino que todavía optimiza el uso de recursos computacionales, haciendo que el método de cuarto orden de Adams sea una herramienta valiosa en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Los métodos predictor-corrector de Adams, tanto en su forma de tercer como de cuarto orden, han sido fundamentales en el campo de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. El método de tercer orden, no obstante más sencillo, ofrece una base sólida para problemas que no requieren una precisión extrema, aun cuando que el método de cuarto orden, con su mayor complejidad, proporciona resultados más exactos y es preferido en situaciones donde la precisión es crucial. Ambos métodos han demostrado ser herramientas valiosas para ingenieros, científicos y matemáticos, facilitando la aproximación de soluciones en situaciones donde los métodos analíticos son inviables.

Para trascender, es posible que veamos integraciones de estos métodos con algoritmos de inteligencia artificial y técnicas de machine learning, lo que podría mejorar aún más su eficiencia y precisión. Además, la investigación en métodos híbridos que combinan los enfoques predictor-corrector con otras técnicas numéricas podría abrir nuevas posibilidades para la resolución de ecuaciones diferenciales complejas. La creciente demanda de simulaciones precisas en campos como la física, la biología computacional y la ingeniería estructural asegurará que los métodos de Adams sigan siendo relevantes y se adapten a nuevas necesidades.

Para aquellos que deseen implementar los métodos de Adams en sus proyectos, es crucial considerar tanto la naturaleza del problema a resolver como los recursos computacionales disponibles. Se recomienda comenzar con el método de tercer orden para familiarizarse con los conceptos básicos y la estructura del algoritmo. Una vez dominado, se puede avanzar al método de cuarto orden para problemas que requieran mayor precisión. A su vez, es fundamental realizar un análisis de los errores y la estabilidad de las soluciones obtenidas, garantizando así la validez de los resultados. Así, mantenerse actualizado con la literatura reciente y participar en comunidades de investigación puede proporcionar escenarios valiosos y nuevas estrategias para mejorar la implementación de estos métodos en diversas aplicaciones.

2.2 Correctores de Adams-Moulton en ecuaciones diferenciales ordinarias

En el ámbito de las matemáticas aplicadas, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) juegan un papel fundamental en la descripción de fenómenos naturales y en la modelación de sistemas complejos. Desde la dinámica de partículas hasta la propagación de enfermedades, las EDOs posibilitan representar de manera precisa y eficaz una amplia variedad de situaciones reales. Sin embargo, la resolución de estas ecuaciones no siempre es directa, lo que ha llevado al desarrollo de múltiples métodos numéricos que facilitan su tratamiento.

Entre estos métodos, los correctores de Adams-Moulton se destacan por su capacidad para proporcionar soluciones precisas y estables a las EDOs, estos métodos, que pertenecen a la categoría de integración implícita, son especialmente útiles en la simulación de sistemas donde la estabilidad es crucial, como en problemas de dinámica de fluidos o en la modelación de sistemas biológicos (Sánchez, 2020). Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son una rama fundamental de las matemáticas que se ocupa del estudio de las relaciones entre funciones y sus derivadas.

Estas ecuaciones son esenciales para describir fenómenos que implican tasas de cambio, y su comprensión es crucial en diversas disciplinas, como la física, la ingeniería, la biología y la economía. Una ecuación diferencial

ordinaria se precisa como una ecuación que relaciona una función desconocida de una variable independiente y sus derivadas. Generalmente, se puede expresar en la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

donde y es la función desconocida, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son sus derivadas de diferentes órdenes, y F es una función dada. Las EDO se clasifican comúnmente según su orden (el mayor número de derivadas presentes en la ecuación) y su linealidad.

- **Orden:** Una EDO de primer orden involucra solamente la primera derivada de la función desconocida, mientras que una de segundo orden involucra hasta la segunda derivada, y así sucesivamente
- **Linealidad:** Una EDO es lineal si puede expresarse de forma lineal respecto a la función desconocida y sus derivadas. En cambio, es no lineal si incluye términos que son productos de la función y/o sus derivadas.

Las EDO son herramientas clave en la modelación matemática, ya que facultan representar una amplia variedad de sistemas dinámicos. Desde el movimiento de partículas bajo la influencia de fuerzas hasta la dinámica de poblaciones en biología, las EDO proporcionan un marco para formular y analizar problemas reales. Conviene destacar, la ley de enfriamiento de Newton, que describe cómo un objeto se enfría en un ambiente, está modelada mediante una EDO de primer orden. La capacidad de las EDO para capturar la esencia de cambios dinámicos las hace indispensables en campos como la física, la ingeniería y las ciencias sociales. Dada la complejidad de muchas EDO, se han desarrollado numerosos métodos para su solución. Algunos de los métodos más comunes incluyen:

- i. *Métodos analíticos:* Estos métodos buscan soluciones exactas a las EDO y son aplicables en casos donde la ecuación faculta una

solución cerrada. Ejemplos incluyen la separación de variables, la integración por partes y el método de variación de parámetros.

- ii. *Métodos numéricos:* Para muchas EDO, especialmente las no lineales o aquellas que no tienen soluciones analíticas, se utilizan métodos numéricos. Estos métodos admiten aproximar soluciones mediante algoritmos que iteran sobre valores discretos. Ejemplos de métodos numéricos son el método de Euler, el método de Runge-Kutta y, por supuesto, los métodos de Adams-Moulton, entre otros.

Ahora bien, las ecuaciones diferenciales ordinarias son herramientas fundamentales en la matemática aplicada, proporcionando un marco para la comprensión y modelación de fenómenos dinámicos en una variedad de contextos. Su estudio y resolución, ya sea a través de métodos analíticos o numéricos, son esenciales para avanzar en la investigación y la aplicación en múltiples disciplinas. Los métodos de Adams-Moulton son un conjunto de técnicas de integración numérica que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Estos métodos pertenecen a la categoría de métodos multistep, que se caracterizan por utilizar múltiples puntos de datos anteriores para calcular el valor de la solución en el siguiente paso.

Los métodos de Adams-Moulton son métodos de integración implícitos que pueden ser considerados como un enfoque de predicción-corrección. A diferencia de los métodos de Adams-Bashforth, que son explícitos, los métodos de Adams-Moulton requieren resolver una ecuación que involucra el valor desconocido de la solución en el paso siguiente (Suescún et al., 2013). Esto significa que, para aplicar estos métodos, se debe utilizar un procedimiento iterativo para despejar la incógnita. El método más básico de Adams-Moulton es el primer método, que se puede expresar como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n) \right)$$

donde (h) es el tamaño del paso, (t_n) y (t_{n+1}) son los puntos de tiempo actuales y siguientes, respectivamente, y $(f(t, y))$ es la función que define la EDO.

Uno de los aspectos más significativos de los métodos de Adams-Moulton es su estabilidad. En general, los métodos implícitos, como los de Adams-Moulton, tienden a ser más estables que sus contrapartes explícitas, especialmente en problemas rígidos donde las soluciones pueden experimentar cambios bruscos. Esta estabilidad hace que los métodos de Adams-Moulton sean particularmente adecuados para la simulación de sistemas donde se espera que ocurran tales comportamientos.

En cuanto a la convergencia, los métodos de Adams-Moulton son convergentes para problemas bien planteados. Esto significa que, al aumentar el número de pasos de integración (es decir, al reducir el tamaño del paso Δt), la solución numérica se acercará a la solución exacta de la EDO. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la convergencia puede verse afectada por la elección de los pasos iniciales y la calidad de la aproximación inicial.

Los métodos de Adams-Moulton se pueden comparar con otros métodos de integración, como los métodos de Runge-Kutta y los métodos de Adams-Bashforth. Aun cuando los métodos de Runge-Kutta son conocidos por su simplicidad y facilidad de implementación, especialmente en problemas no rígidos, los métodos de Adams-Moulton ofrecen ventajas en términos de estabilidad y son preferibles en contextos donde se requiere mayor precisión en intervalos de tiempo más largos.

Los métodos de Adams-Bashforth, aunque son más simples al ser explícitos, pueden enfrentar problemas de estabilidad en situaciones críticas, lo que limita su aplicación en ciertos problemas. En contraste, la naturaleza implícita de los métodos de Adams-Moulton les faculta abordar un rango más amplio de problemas, incluyendo aquellos que presentan rigidez. En síntesis, los métodos de Adams-Moulton son herramientas potentes y versátiles en la solución de EDOs, ofreciendo un equilibrio entre precisión, estabilidad y aplicabilidad en diversos contextos. Los métodos de Adams-Moulton son herramientas poderosas en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), y su aplicabilidad se extiende a una amplia variedad de campos.

En la física, muchos fenómenos pueden ser descritos mediante EDOs, desde el movimiento de partículas hasta la dinámica de fluidos. Los correctores de Adams-Moulton son particularmente valiosos en la simulación de sistemas donde la precisión es crucial, como en la modelación del movimiento de cuerpos en campos gravitacionales o la simulación de oscilaciones en sistemas mecánicos. Su capacidad para manejar problemas rígidos, donde las soluciones pueden cambiar rápidamente, los hace ideales para modelar sistemas que requieren un control meticuloso del error y la estabilidad. Esto faculta a los académicos predecir el comportamiento de estos sistemas bajo diversas condiciones iniciales y perturbaciones.

En el ámbito de la biología, los correctores de Adams-Moulton se utilizan para modelar una variedad de procesos, desde el crecimiento de poblaciones hasta la propagación de enfermedades. Es decir, en modelos de crecimiento poblacional, las EDOs pueden describir cómo las poblaciones de diferentes especies interactúan entre sí y con su entorno. Los métodos de Adams-Moulton facultan simular estas interacciones de manera eficiente, proporcionando resultados precisos que son fundamentales para la toma de decisiones en conservación y gestión de recursos. A su vez, en epidemiología, estos correctores son útiles para modelar la dinámica de enfermedades infecciosas, ayudando a predecir brotes y evaluar el impacto de intervenciones sanitarias.

En el campo de la ingeniería, los correctores de Adams-Moulton son ampliamente utilizados en el análisis y diseño de sistemas dinámicos, como estructuras, circuitos eléctricos y sistemas de control. Estos métodos consienten a los ingenieros modelar el comportamiento de sistemas complejos que cambian con el tiempo, proporcionando herramientas para la optimización y mejora del rendimiento. Es decir, en la ingeniería civil, se pueden aplicar para simular la respuesta de edificaciones ante cargas dinámicas, como terremotos o vientos fuertes, asegurando que se cumplan los estándares de seguridad. Asimismo, en ingeniería electrónica, son útiles en la simulación de circuitos transitorios, donde se requiere un seguimiento preciso de las variaciones en el tiempo para garantizar la funcionalidad del sistema.

En síntesis, los correctores de Adams-Moulton ofrecen una versatilidad notable en la resolución de EDOs en diversas disciplinas, permitiendo una mejor comprensión y análisis de fenómenos complejos en física, biología e ingeniería. Su capacidad para proporcionar soluciones precisas y estables los convierte en una herramienta indispensable para académicos y profesionales que buscan modelar y simular la realidad de manera efectiva.

Los métodos de Adams-Moulton, con su enfoque implícito, ofrecen ventajas significativas en términos de estabilidad y convergencia, lo que los convierte en una elección preferida para una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas. Desde la simulación de sistemas físicos hasta el modelado de fenómenos biológicos y la resolución de problemas en ingeniería, estos correctores han demostrado ser herramientas valiosas que admiten a los académicos y profesionales abordar problemas complejos con mayor eficacia.

En general, los correctores de Adams-Moulton no solo son un componente esencial en la caja de herramientas de los matemáticos aplicados, sino que también representan un puente entre la teoría matemática y su aplicación práctica en el mundo real. Con su capacidad para mejorar la precisión y la estabilidad en la resolución de EDOs, estos métodos seguirán siendo relevantes en el ámbito de la investigación y la ingeniería.

2.3 Predictores de Adams-Bashforth: Fundamentos, Implementación y Aplicaciones en Métodos Numéricos

Los predictores de Adams-Bashforth son una clase de métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Estos métodos, que forman parte del enfoque de predicción-corrección en la integración numérica, son especialmente valorados por su capacidad para abordar problemas donde la precisión y la eficiencia son esenciales.

Los métodos de Adams-Bashforth fueron desarrollados en el siglo XIX por el matemático y astrónomo John Adams y el ingeniero y matemático Francis Bashforth, estos métodos se basan en la idea de utilizar valores anteriores de la solución para predecir el siguiente valor de la función,

permitiendo así la integración de EDOs de manera eficiente (Segarra, 2020). La formulación de estos métodos se deriva de la serie de Taylor, que proporciona una aproximación polinómica de una función en torno a un punto dado.

El primer método de Adams-Bashforth, de primer orden, se introdujo en 1856 como parte de los esfuerzos por mejorar la precisión de los cálculos en astronomía. Desde entonces, la familia de métodos ha crecido, incluyendo variantes de orden superior que posibilitan un mayor grado de precisión, lo que ha contribuido significativamente al campo de las simulaciones numéricas.

La relevancia de los predictores de Adams-Bashforth en el ámbito de los métodos numéricos radica en su simplicidad y eficacia. Estos métodos condescienden realizar pronósticos rápidos de soluciones a EDOs sin requerir la evaluación de derivadas de orden superior, lo que los hace computacionalmente atractivos. Entonces, su capacidad para ser implementados de manera eficiente en algoritmos de predicción-corrección ha llevado a su adopción en diversas aplicaciones científicas y de ingeniería.

Los predictores de Adams-Bashforth son especialmente útiles en situaciones donde se requiere una integración continua y precisa de sistemas dinámicos, tales como en simulaciones de sistemas físicos, estudios de dinámica de fluidos y modelado de poblaciones en biología. Los métodos de Adams-Bashforth tienen un amplio espectro de aplicaciones en la resolución de ecuaciones diferenciales (Sierociński et al., 2025). Desde la simulación de fenómenos naturales, como la propagación de ondas y el movimiento de cuerpos celestes, hasta problemas en ingeniería, como la dinámica estructural y el análisis de circuitos eléctricos, estos métodos se utilizan para resolver problemas que requieren una aproximación precisa y eficiente.

Además, los predictores de Adams-Bashforth se combinan a menudo con métodos correctores, como el método de Adams-Moulton, lo que faculta mejorar aún más la precisión de las soluciones. Esta combinación de métodos hace que los predictores de Adams-Bashforth sean una herramienta fundamental en la caja de herramientas de los científicos e ingenieros que trabajan en el ámbito de la simulación numérica. Los predictores de Adams-

Bashforth son métodos numéricos que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) mediante la aproximación de la solución en puntos discretos. Para entender su funcionamiento, es fundamental explorar los conceptos matemáticos que subyacen a su desarrollo.

El teorema de Taylor es una herramienta clave en el análisis de métodos numéricos. Este teorema establece que cualquier función que sea suficientemente suave puede ser aproximada localmente por un polinomio. En el contexto de los predictores de Adams-Bashforth, utilizamos la expansión en serie de Taylor para aproximar la solución de una EDO. Supongamos que tenemos una función $y(t)$ que es la solución de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$. La expansión de Taylor de $y(t)$ alrededor de un punto t_n se expresa como:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + O(h^4)$$

donde h es el tamaño del paso. Al sustituir la derivada y' por $f(t_n, y(t_n))$ y al evaluar las derivadas sucesivas, podemos construir una serie de aproximaciones que son la base para los métodos de Adams-Bashforth.

Los métodos de Adams-Bashforth son, en esencia, métodos multistep que utilizan información de pasos anteriores para predecir el valor futuro de la solución. El método más simple, conocido como el método de primer orden, se puede expresar como:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

\\]

Siempre que aumentamos el orden del método, incorporamos más evaluaciones de f en pasos anteriores. Para ilustrar, el método de segundo orden se reduce a:

\\[

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

\\]

En general, el método de k -ésimo orden se puede expresar como:

\\[

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} b_j f(t_{n-j}, y_{n-j})$$

\\]

donde los coeficientes b_j son determinados por la fórmula del método y están relacionados con las derivadas sucesivas de la función. Este enfoque nos faculta obtener soluciones más precisas al utilizar información de múltiples pasos previos.

Como en cualquier método numérico, es crucial considerar los errores y la estabilidad, el error de truncamiento de un método de Adams-Bashforth se puede dividir en error local y error global. El error local se refiere a la discrepancia entre la solución exacta y la aproximación en un solo paso, mientras que el error global se acumula en múltiples pasos. La estabilidad del método depende de la elección del tamaño del paso h y de la naturaleza de la función $f(t, y)$. Es importante tener en cuenta que los métodos de Adams-Bashforth son explícitos y pueden volverse inestables si el paso es

demasiado grande o si la ecuación diferencial presenta características duras. Por lo tanto, el análisis de estabilidad, como el criterio de von Neumann, es esencial para garantizar que el método proporcione resultados confiables.

En síntesis, los fundamentos matemáticos detrás de los predictores de Adams-Bashforth son esenciales para comprender su implementación y efectividad en la resolución de ecuaciones diferenciales. Desde la expansión en serie de Taylor hasta el análisis de errores y estabilidad, estos conceptos proporcionan el marco necesario para aplicar estos métodos en diversas aplicaciones científicas y de ingeniería.

La implementación de los predictores de Adams-Bashforth en Python es relativamente sencilla gracias a la versatilidad del lenguaje y las bibliotecas disponibles. Ahora bien, se presenta un ejemplo básico que ilustra cómo se puede utilizar el método de Adams-Bashforth de primer orden para resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$. Consideremos la EDO $\frac{dy}{dt} = -2y + 1$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

python

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Definición de la función $f(t, y)$

```
def f(t, y):
```

```
    return -2 * y + 1
```

Método de Adams-Bashforth de primer orden

```
def adams_bashforth(f, y0, t0, tn, h):
```

```
    n = int((tn - t0) / h) + 1
```

```
    t = np.linspace(t0, tn, n)
```

```
    y = np.zeros(n)
```

```
y[0] = y0
```

Primer paso de Euler

```
y[1] = y[0] + h * f(t[0], y[0])
```

Iteración de Adams-Bashforth

```
for i in range(1, n - 1):
```

```
    y[i + 1] = y[i] + (h / 2) * (f(t[i], y[i]) + f(t[i - 1], y[i - 1]))
```

```
return t, y
```

Parámetros

```
t0 = 0.0
```

```
tn = 5.0
```

```
h = 0.1
```

```
y0 = 0.0
```

Llamada al método

```
t, y = adams_bashforth(f, y0, t0, tn, h)
```

Gráfica de los resultados

```
plt.plot(t, y, label='Predicción (Adams-Bashforth)')
```

```
plt.title('Solución de EDO usando el método Adams-Bashforth')
```

```
plt.xlabel('Tiempo')
```

```
plt.ylabel('y(t)')
```

```
plt.legend()
```

```
plt.grid()
```

```
plt.show()
```

Este código resuelve la EDO y visualiza los resultados, permitiendo a los usuarios observar cómo el método de Adams-Bashforth aproxima la

solución. Es vital comparar el rendimiento del método de Adams-Bashforth con otros métodos de resolución de EDOs, como el método de Euler y los métodos de Runge-Kutta. Aun cuando el método de Euler es simple y fácil de implementar, su precisión es limitada, especialmente para pasos grandes. Por otro lado, los métodos de Runge-Kutta, como el RK4, ofrecen una mayor precisión, pero a menudo son más costosos computacionalmente.

Si bien Adams-Bashforth es menos preciso que los métodos de Runge-Kutta de orden superior, su ventaja radica en su eficiencia en términos de cálculo, especialmente para problemas donde se requiere una serie de evaluaciones en un plazo establecido. Los métodos multistep, como Adams-Bashforth, pueden ser más apropiados en situaciones donde la evaluación de la función es costosa y se dispone de valores anteriores. Al implementar los predictores de Adams-Bashforth, hay varias consideraciones que pueden mejorar la eficiencia y precisión del método:

- i. *Elegir un tamaño de paso adecuado:* Un tamaño de paso demasiado grande puede llevar a resultados imprecisos, en tanto que un tamaño de paso muy pequeño puede incrementar el tiempo de cómputo. Es recomendable realizar pruebas preliminares para encontrar un equilibrio.
- ii. *Controlar el error:* Implementar un método de control de error puede ser útil para ajustar dinámicamente el tamaño del paso en función de la precisión deseada.
- iii. *Combinación con métodos de corrección:* Para mejorar la estabilidad y precisión, se puede considerar utilizar un método de corrección tras la predicción inicial, como el método de Adams-Moulton.
- iv. *Aprovechar las bibliotecas numéricas:* Existen bibliotecas en Python, como SciPy, que implementan métodos avanzados para la resolución de EDOs y pueden ser más eficientes que una implementación manual.

Siguiendo estas recomendaciones, se puede maximizar el rendimiento y la aplicabilidad de los predictores de Adams-Bashforth en la resolución de problemas en ciencia e ingeniería. Los predictores de Adams-Bashforth son herramientas poderosas que han permitido a científicos e ingenieros enfrentar una amplia gama de problemas, su capacidad para ofrecer

soluciones precisas y eficientes a ecuaciones diferenciales los convierte en un componente esencial en el arsenal de métodos numéricos (Sánchez et al., 2024). La comprensión y correcta implementación de los predictores de Adams-Bashforth no solo dignificará nuestro conocimiento teórico, sino que incluso tendrá un impacto significativo en la práctica de la modelización matemática en el mundo real.

2.4 Modelo de Lotka-Volterra

El modelo presa-depredador, también conocido como el modelo Lotka-Volterra, se ha convertido en un punto de partida para desarrollar nuevos métodos y teoría matemáticas. El modelo antes del extracto es para la interacción entre los dos tipos, de los cuales uno de ellos tiene muchos alimentos y otros tipos con solo el suministro de alimentos para causar daños. También se cree que durante el proceso durante el tiempo, el medio ambiente no debe cambiar en la dirección que sea beneficiosa para cualquier especie y cada adaptación genética es bastante lenta.

En general, el modelo Lotka-Volterra muestra que las presas están aumentando exponencialmente en caso de que no haya depredadores y la tasa de mortalidad de los depredadores en ausencia de sacrificios proporcionales a su población $Y(t)$ con cada muerte debido a la falta de alimentos, la tasa biológica de los animales de carne depende del número de daños en cada reunión. Es por eso que en el modelo clásico de Lotka-Volterra, se considera un entorno de vida que incluye dos tipos de interacción entre sí. Los tipos de $X(t)$ se llamarán víctimas y no tendrán fuentes de poder competitivas; otras especies $Y(t)$ llamaremos a los depredadores, tiene $X(t)$ en su cadena alimenticia

- i. *Estudio de caso de un modelo Lotka-Volterra (RPubs, 2024):*

R

```
LVmod <- function(Time, State, Pars) {  
  with(as.list(c(State, Pars)), {  
    Ingestion <- rIng * Prey * Predator
```

```

GrowthPrey <- rGrow * Prey * (1 - Prey/K)

MortPredator <- rMort * Predator

dPrey <- GrowthPrey - Ingestion

dPredator <- Ingestion * assEff - MortPredator

return(list(c(dPrey, dPredator)))

})

}

```

Se han determinado los parámetros del modelo (pars) y las condiciones iniciales (yini), el vector de tiempo (times) está indicado para modelar las ecuaciones diferenciales realizadas mediante el uso de funciones ode en el paquete deSolve. Los resultados se almacenan en la instalación, incluida una breve presentación de los resultados (summary(Out)) (RPubs, 2024):

R

```

pars <- c(rIng = 0.2, # /day, rate of ingestion

          rGrow = 1.0, # /day, growth rate of prey

          rMort = 0.2, # /day, mortality rate of predator

          assEff = 0.5, # -, assimilation efficiency

          K = 10) # mmol/m3, carrying capacity

yini <- c(Prey = 1, Predator = 2)

times <- seq(0, 200, by = 1)

out <- ode(yini, times, LVmod, pars)

summary(out)

```

El modelo Lotka-Volterra describe la competencia y las extensiones multidisciplinares como el tema de un rico estudio teórico. Ahora bien, su pronóstico es difícil porque sus parámetros deben medirse en experimentos competitivos; además, el modelo descrito en el sentido literal de la mejor competencia con la intervención directa. El reconocimiento de estas limitaciones ha llevado al desarrollo de una serie de modelos mecánicos interactivos entre recursos y consumidores, así como otras interacciones, hasta el día de hoy (Yamauchi, 2025).

El modelo de Lotka–Volterra (LV) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe interacciones entre especies, históricamente célebre por el caso depredador–presa, pero hoy ampliamente generalizado a competencia, mutualismo, redes tróficas y comunidades grandes. A continuación se presenta una síntesis rigurosa que cubre: formulación básica, estabilidad y ciclos, puntos de equilibrio, generalizaciones (multiespecie, competencia en espacio de nicho, retroalimentación no lineal), efectos de la estructura de interacciones y discretizaciones consistentes.

Los modelos LV competitivos donde la intensidad de interacción depende de la distancia en un espacio de nicho, a través de un “kernel” de interacción, exhiben cambios cualitativos drásticos cuando la transformada de Fourier del kernel no es positiva definida: emerge una inestabilidad formadora de patrones, con “clustering” de especies y espaciamientos característicos en el estado estacionario. Este fenómeno se ha demostrado analítica y numéricamente para kernels exponenciales estirados y constantes, con estimaciones del número de especies y sus separaciones en el equilibrio (Pigolotti et al., 2007). Complementariamente, en sistemas competitivos con retardo no local y difusión, pueden surgir patrones de Turing (manchas y franjas). Se han establecido condiciones de bifurcación de Turing y ecuaciones de amplitud mediante métodos de escalas múltiples, corroboradas con simulaciones numéricas (Han y Zhi, 2018).

Capítulo III

Método de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales

El Método de Taylor es una técnica matemática fundamental utilizada para aproximar funciones y resolver ecuaciones diferenciales. Esta metodología se basa en la premisa de que una función puede representarse como una serie infinita de términos, derivados de sus derivadas en un punto específico. Con la ayuda de esta representación, es posible obtener una aproximación de la función en torno a ese punto, lo que resulta especialmente útil en el contexto de las ecuaciones diferenciales, donde a menudo se buscan soluciones a problemas que no pueden resolverse de manera analítica.

La importancia del Método de Taylor en la resolución de ecuaciones diferenciales radica en su capacidad para ofrecer soluciones precisas y prácticas. En muchos casos, las ecuaciones diferenciales no tienen soluciones exactas, o estas son difíciles de encontrar. El Método de Taylor faculta a los académicos y científicos obtener aproximaciones que pueden ser utilizadas en la práctica, facilitando así el análisis y la comprensión de fenómenos complejos en diversas disciplinas, desde la física hasta la biología.

El desarrollo del Método de Taylor se remonta al siglo XVIII, con contribuciones significativas de matemáticos como Brook Taylor, quien formalizó este enfoque en su obra. En el plazo, el método ha evolucionado y se ha integrado en una amplia gama de aplicaciones, su versatilidad y efectividad lo han consolidado como una herramienta esencial en el análisis numérico y en la resolución de problemas matemáticos en general.

3.1 Fundamentos del Método de Taylor

El Método de Taylor es una técnica fundamental en el análisis numérico que faculta aproximar funciones y resolver ecuaciones diferenciales mediante el uso de series de potencias. Se basa en la idea de que cualquier función suave (es decir, que tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo) puede ser aproximada mediante una serie infinita de términos,

cada uno de los cuales involucra las derivadas de la función en un punto específico (Liebeck, 2016). Esta serie, conocida como serie de Taylor, se expresa matemáticamente como:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

donde a es el punto alrededor del cual se realiza la expansión. La convergencia de esta serie depende de la función en cuestión y de la distancia entre x y a .

Para aplicar el Método de Taylor en la resolución de ecuaciones diferenciales, es esencial calcular las derivadas de la función objetivo. Las derivadas son fundamentales, ya que cada término de la serie de Taylor incluye un factor que representa la derivada de la función en el punto a . Conviene destacar, al resolver una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se requiere conocer f y sus derivadas respecto a y para construir la serie que permitirá aproximar la solución $y(x)$. La serie de Taylor de una función $y(x)$ en un punto x_0 puede ser escrita como:

$$f$$

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Esto facilita obtener valores aproximados de y en puntos cercanos a x_0 . El Método de Taylor es una herramienta poderosa, pero su eficacia depende de ciertas condiciones. En primer lugar, se requiere que la función a aproximar tenga derivadas continuas hasta el orden necesario en el intervalo considerado. Además, la serie de Taylor debe converger a la función original en el rango de interés. Otro aspecto a considerar es la elección del punto de expansión a . Un punto más cercano al valor donde se desea calcular la aproximación generalmente proporcionará mejores resultados. Sin embargo, si la función presenta comportamientos complicados o discontinuidades, el método puede fallar o proporcionar resultados imprecisos.

Total, los fundamentos del Método de Taylor se basan en la aproximación de funciones por medio de series de potencias derivadas, lo que facilita resolver ecuaciones diferenciales de manera efectiva. Comprender la teoría detrás del método y las condiciones de su aplicabilidad es esencial para su correcta implementación en problemas matemáticos y aplicados. La implementación del Método de Taylor en R facilita a los académicos y estudiantes resolver ecuaciones diferenciales de manera efectiva, aprovechando la potencia de este lenguaje de programación orientado a datos (Vergel et al., 2022).

Antes de comenzar con la implementación del Método de Taylor, es fundamental asegurarse de que tenemos instalados los paquetes necesarios. Para la mayoría de las aplicaciones de ecuaciones diferenciales, el paquete `deSolve` es una opción robusta, aunque también se pueden utilizar otros paquetes que facilitan la manipulación de funciones y derivadas. Para instalar `deSolve`, así como cualquier otro paquete que consideres útil, puedes utilizar el siguiente comando en la consola de R:

R

```
install.packages("deSolve")
```

Una vez que el paquete esté instalado, es importante cargarlo en tu sesión de R:

R

```
library(deSolve)
```

El Método de Taylor se basa en la aproximación de funciones mediante series de Taylor. En el contexto de R, normalmente se usa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). La sintaxis básica para implementar el método implica definir la función que representa la EDO y luego utilizar la función `ode()` del paquete `deSolve`, que faculta integrar numéricamente la ecuación, se presenta un esquema básico de cómo estructurar el código:

- a. Definir la función que describe la EDO.
- b. Especificar las condiciones iniciales.
- c. Definir el intervalo de tiempo para la solución.
- d. Llamar a la función `ode()` para obtener la solución.

Un ejemplo de esta estructura sería:

R

Definición de la EDO

```
modelo <- function(t, y, parms) {  
  dy <- y  Ejemplo simple:  $dy/dt = y$   
  return(list(dy))  
}
```

```
}
```

Condiciones iniciales

```
y0 <- 1  Valor inicial
```

```
tiempo <- seq(0, 5, by = 0.1)  Intervalo de tiempo
```

Integración

```
solucion <- ode(y = y0, times = tiempo, func = modelo, parms = NULL)
```

Visualización de resultados

```
plot(solucion[, "time"], solucion[, "y"], type = "l", xlab = "Tiempo", ylab = "y(t)",  
main = "Solución de la EDO usando el Método de Taylor")
```

Para ilustrar la aplicación del Método de Taylor en R, consideremos la ecuación diferencial sencilla:

$\backslash[$

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

$\backslash]$

Con la condición inicial $\backslash(y(0) = 1 \backslash)$. La solución analítica de esta ecuación es $\backslash(y(t) = e^{\{-2t\}} \backslash)$. Sin embargo, utilizaremos el Método de Taylor para aproximar esta solución. El código para resolver esta EDO utilizando el Método de Taylor sería:

R

Definición de la EDO

```
modelo <- function(t, y, parms) {
```

```
  dy <- -2 * y  dy/dt = -2y
```

```

return(list(dy))
}

Condiciones iniciales
y0 <- 1  Valor inicial

tiempo <- seq(0, 5, by = 0.1)  Intervalo de tiempo

Integración
solucion <- ode(y = y0, times = tiempo, func = modelo, parms = NULL)

Visualización de resultados

plot(solucion[, "time"], solucion[, "y"], type = "l", xlab = "Tiempo", ylab = "y(t)",
main = "Solución de la EDO usando el Método de Taylor")

lines(tiempo, exp(-2 tiempo), col = "red", lty = 2)  Solución analítica

legend("topright", legend = c("Método de Taylor", "Solución Analítica"), col =
c("black", "red"), lty = c(1, 2))

```

En este ejemplo, la línea negra representa la solución aproximada obtenida mediante el Método de Taylor, pese a que la línea roja muestra la solución analítica. Como se puede observar, ambas soluciones son bastante cercanas, lo que valida la efectividad del método. Con esta implementación básica, puedes adaptar y expandir el uso del Método de Taylor en R para resolver ecuaciones diferenciales más complejas, lo que te permitirá profundizar en el análisis y la simulación de diversos fenómenos en la investigación.

El Método de Taylor tiene diversas aplicaciones en la investigación científica y en la ingeniería. Su capacidad para proporcionar aproximaciones precisas lo convierte en un recurso valioso en campos como la física, la biología matemática y la economía, donde las ecuaciones diferenciales son comunes. Mediante la utilización de este método, los académicos pueden modelar fenómenos naturales, optimizar sistemas y realizar simulaciones que requieren un alto grado de precisión. Además, su implementación en

entornos computacionales como R faculta un análisis más eficiente y accesible, lo que amplía su uso en la comunidad científica.

Las investigaciones en profundidad deben centrarse en el desarrollo de algoritmos más eficientes que integren el método con técnicas modernas de aprendizaje automático y análisis de datos. Esto podría abrir nuevas posibilidades en la resolución de ecuaciones diferenciales complejas, facilitando su aplicación en áreas emergentes como la inteligencia artificial y la modelización de sistemas dinámicos. En definitiva, el Método de Taylor no solo es una técnica fundamental en matemáticas y ciencias aplicadas, sino que de igual manera promete seguir siendo relevante en el corto plazo, adaptándose a las necesidades cambiantes de la investigación contemporánea.

3.2 Método de Ralston: Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con R

El método de Ralston se ha consolidado como una herramienta fundamental en el ámbito de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Su desarrollo histórico, junto con sus aplicaciones prácticas, lo convierten en un tema relevante tanto para estudiantes como para profesionales en diversas disciplinas. Ralston en la década de 1960. Su creación se enmarca dentro de un contexto más amplio de búsqueda de técnicas numéricas eficientes para resolver EDO, un tema que ha captado la atención de matemáticos y científicos desde hace siglos. Historicamente, diversos métodos han sido desarrollados, pero el enfoque de Ralston se destacó por su simplicidad y eficacia. Este método se basa en la idea de aproximar la solución de una EDO utilizando un esquema de Runge-Kutta de segundo orden, lo que faculta obtener resultados precisos con un menor número de evaluaciones de la función.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son fundamentales en la modelización de fenómenos naturales y en la descripción de sistemas dinámicos en campos como la física, la ingeniería y la biología. Sin embargo, muchas de estas ecuaciones no pueden resolverse analíticamente, lo que hace que los métodos numéricos sean esenciales. El método de Ralston se ha convertido en una opción popular debido a su capacidad para ofrecer

soluciones aproximadas de manera eficiente y con un error controlado. Como resultado, su uso se ha expandido en diversas aplicaciones prácticas que requieren soluciones rápidas y confiables.

El método de Ralston es un procedimiento numérico diseñado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de la forma $y' = f(x, y)$. Fue propuesto por el matemático Robert Ralston en 1963 como una variante de los métodos de Runge-Kutta. Este método se categoriza como un método de orden dos, lo que significa que proporciona una aproximación que es más precisa que los métodos de primer orden, como el método de Euler. La esencia del método de Ralston radica en la elección de dos puntos en el intervalo de integración para calcular una aproximación de la solución. Estos puntos se determinan mediante la fórmula:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4} k_1\right)$$

donde h es el tamaño del paso y k_1 y k_2 son las pendientes calculadas en los puntos seleccionados. La aproximación de la solución se obtiene luego mediante la fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} k_1 + \frac{3h}{4} k_2$$

Este enfoque faculta que el método de Ralston logre un equilibrio entre la precisión y la eficiencia computacional. Al comparar el método de Ralston con otros métodos numéricos, como el método de Euler y el clásico método de Runge-Kutta de cuarto orden, se pueden observar diferencias significativas en términos de precisión y tasa de convergencia.

- **Método de Euler:** Es un método de primer orden que, no obstante es simple y fácil de implementar, tiende a ser inexacto para intervalos de integración grandes o funciones altamente no lineales. Su

aproximación es lineal y, por lo general, requiere pasos más pequeños para obtener resultados aceptables.

- **Método de Runge-Kutta de cuarto orden:** Este método proporciona una mayor precisión, ya que utiliza cuatro evaluaciones de la función por paso. Sin embargo, al igual es más computacionalmente costoso, lo que puede ser un factor limitante en problemas que requieren muchas iteraciones.

El método de Ralston, al ser un método de segundo orden, se sitúa en un punto intermedio, ofreciendo un compromiso favorable entre precisión y eficiencia, esto lo hace especialmente útil en situaciones donde se necesita una solución rápida, pero con una precisión razonable; presenta varias ventajas, así como algunas desventajas que es importante considerar al elegir un método para la resolución de EDOs (Devia et al., 2020).

La implementación del método es relativamente sencilla, lo que lo hace accesible para aquellos que están comenzando a trabajar con métodos numéricos. Al ser un método de segundo orden, faculta obtener resultados con una precisión razonable sin la necesidad de múltiples evaluaciones de la función en cada paso. Comparado con métodos de mayor orden, como el de Runge-Kutta de cuarto orden, el método de Ralston requiere menos cálculos por paso, lo que puede ser beneficioso en términos de tiempo de ejecución.

Si bien es más preciso que el método de Euler, puede no ser suficiente para problemas donde se requieren altos niveles de precisión, especialmente en intervalos de integración grandes. La calidad de la solución depende en gran medida del tamaño del paso (h) . Pasos demasiado grandes pueden llevar a errores significativos, aun cuando pasos demasiado pequeños pueden aumentar el tiempo de cálculo sin una mejora proporcional en la precisión. Existen casos específicos, como problemas rígidos, donde este método puede no ser la mejor opción debido a su estabilidad.

En teoría, el método de Ralston es una herramienta poderosa en el arsenal de los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, ofreciendo un buen equilibrio entre simplicidad y efectividad. La implementación del método de Ralston en el lenguaje de programación R faculta a los académicos y profesionales resolver ecuaciones

diferenciales ordinarias (EDO) de manera eficiente y eficaz. Antes de comenzar a implementar el método de Ralston, es importante asegurarse de que se tienen instalados los paquetes necesarios en R. La mayoría de las funciones esenciales para la manipulación de datos y la visualización se encuentran en los paquetes base, pero es recomendable instalar y cargar algunos paquetes adicionales para facilitar el proceso. En este caso, se utilizará el paquete ggplot2 para la visualización gráfica de los resultados.

R

Instalación de ggplot2 si no está ya instalado

```
if (!requireNamespace("ggplot2", quietly = TRUE)) {  
  install.packages("ggplot2")  
}
```

Cargar el paquete

```
library(ggplot2)
```

El método de Ralston se basa en un esquema de dos pasos que utiliza un valor intermedio para obtener una aproximación más precisa de la solución de una EDO.

R

Función para implementar el método de Ralston

```
ralston_method <- function(f, y0, x0, h, n) {
```

 Inicializamos vectores para almacenar los valores de X y Y

```
    x_values <- numeric(n + 1)
```

```
    y_values <- numeric(n + 1)
```

 Asignamos los valores iniciales

```

x_values[1] <- x0
y_values[1] <- y0

Aplicamos el método de Ralston
for (i in 1:n) {
  x <- x_values[i]
  y <- y_values[i]
  k1 <- h * f(x, y)
  k2 <- h * f(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k1)
  y_values[i + 1] <- y + (k1 + 2 * k2) / 3
  x_values[i + 1] <- x + h
}

return(data.frame(x = x_values, y = y_values))
}

```

En esta función, f es la función que define la EDO, y_0 es el valor inicial de la variable dependiente, x_0 es el valor inicial de la variable independiente, h es el tamaño del paso y n es el número de pasos a realizar. Para ilustrar la implementación del método de Ralston, consideremos la EDO simple:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

con la condición inicial $(y(0) = 1)$. Queremos aproximar la solución en el intervalo $[0, 1]$ con un tamaño de paso $(h = 0.1)$.

R

Definimos la función que representa la EDO

```
f <- function(x, y) {  
  return(y)  
}
```

Parámetros iniciales

```
y0 <- 1  
x0 <- 0  
h <- 0.1  
n <- 10
```

Ejecutamos el método de Ralston

```
result <- ralston_method(f, y0, x0, h, n)
```

Visualizamos los resultados

```
ggplot(result, aes(x = x, y = y)) +  
  geom_line(color = "blue") +  
  labs(title = "Solución de la EDO usando el método de Ralston",  
        x = "x",  
        y = "y") +  
  theme_minimal()
```

Este código genera una gráfica que muestra la solución aproximada de la EDO en el intervalo especificado. A partir de este ejemplo, podemos ver cómo el método de Ralston se implementa de manera efectiva en R, proporcionando una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias en diversas aplicaciones. El método de Ralston, como técnica numérica para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

(EDO), ha encontrado un amplio espectro de aplicaciones en diversas disciplinas. En el campo de la ingeniería, el método de Ralston se utiliza frecuentemente para modelar y resolver problemas relacionados con sistemas dinámicos. En efecto, en la ingeniería mecánica, se puede aplicar para analizar el movimiento de cuerpos bajo la influencia de fuerzas externas. Un caso típico es el estudio del movimiento de un péndulo, donde las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento pueden ser resueltas eficientemente utilizando el método de Ralston, permitiendo a los ingenieros predecir la posición y velocidad del péndulo en cualquier instante de tiempo.

A su vez, en la ingeniería eléctrica, el método se utiliza en el análisis de circuitos eléctricos que involucran componentes como resistores, capacitores e inductores. Las ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento de estos circuitos pueden ser complejas, pero el método de Ralston facilita obtener soluciones numéricas de manera rápida y precisa, facilitando la optimización de diseños y la simulación de respuestas a diferentes condiciones de entrada.

El ámbito de la economía y las finanzas también se beneficia del método de Ralston, particularmente en la modelización de fenómenos dinámicos como el crecimiento económico o la fluctuación de precios. En particular, en modelos de crecimiento, se pueden emplear ecuaciones diferenciales para describir cómo varía la producción en función del tiempo en respuesta a inversiones o cambios en la mano de obra. El método de Ralston facilita a los economistas simular diferentes escenarios y proyectar el impacto de políticas económicas.

Asimismo, en la evaluación de opciones financieras y derivados, donde los precios de los activos siguen dinámicas complejas, se pueden utilizar ecuaciones diferenciales estocásticas. Con la ayuda del método de Ralston, es posible aproximar soluciones que permitan a los analistas tomar decisiones informadas sobre la compra o venta de activos, maximizando así sus retornos.

Para ilustrar la versatilidad del método de Ralston, se pueden considerar estudios de casos en los que este ha sido implementado con éxito.

Un ejemplo notable es el modelado de la propagación de enfermedades infecciosas, donde se utilizan ecuaciones diferenciales para describir la dinámica entre la población susceptible, infectada y recuperada. La aplicación del método de Ralston faculta a los académicos realizar simulaciones que ayudan a predecir la evolución de brotes y evaluar la efectividad de intervenciones de salud pública.

Otro caso es el análisis de sistemas ecológicos, donde se modelan interacciones entre especies y su entorno. Las ecuaciones que rigen estos sistemas a menudo son no lineales y difíciles de resolver analíticamente. El método de Ralston proporciona una herramienta numérica robusta para obtener soluciones aproximadas, lo que facilita la comprensión de la dinámica ecológica y la planificación de estrategias de conservación.

Ahora bien, el método de Ralston se ha consolidado como una técnica valiosa en diversas disciplinas, desde la ingeniería y las ciencias físicas hasta la economía y la ecología. Su capacidad para proporcionar soluciones numéricas efectivas a ecuaciones diferenciales complejas lo convierte en una herramienta esencial para académicos y profesionales en múltiples campos. El método de Ralston se presenta como una herramienta valiosa para aquellos que enfrentan la tarea de resolver ecuaciones diferenciales de forma numérica. Su capacidad para generar soluciones precisas y su relativa simplicidad lo convierten en una opción atractiva para académicos y profesionales. Sin embargo, es crucial considerar sus limitaciones y evaluar si es el enfoque más adecuado en función de las características del problema específico a tratar.

Entonces, sería interesante explorar versiones adaptativas del método que permitan una mayor flexibilidad en la selección de pasos, lo que podría resultar en una optimización de los recursos computacionales utilizados. Total, el método de Ralston no solo es una herramienta establecida, sino que incluso representa un campo fértil para nacientes exploraciones en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.3 Ecuaciones explícitas de primer orden

Las ecuaciones explícitas de primer orden constituyen una de las formas más fundamentales y utilizadas en el ámbito de las matemáticas y la

ciencia aplicada. Estas ecuaciones son esenciales para comprender el comportamiento de diversos fenómenos en la naturaleza y en múltiples disciplinas, desde la física hasta la economía. En términos generales, una ecuación explícita de primer orden se puede expresar en forma de una función que relaciona una variable independiente con una variable dependiente, sin involucrar derivadas de orden superior (Herrera, 2024). Esto significa que la ecuación se puede escribir de manera que la variable dependiente esté aislada en uno de los lados de la igualdad, permitiendo una interpretación directa y sencilla de la relación entre las dos variables.

El estudio de las ecuaciones explícitas de primer orden es crucial, ya que no solo proporciona las bases para resolver problemas matemáticos, sino que también faculta modelar situaciones del mundo real de una manera que se puede analizar y predecir. Conviene destacar, en física, estas ecuaciones pueden describir el movimiento de un objeto bajo ciertas condiciones, en tanto que en economía pueden utilizarse para modelar la relación entre oferta y demanda.

Una ecuación explícita de primer orden es una relación matemática que expresa de forma directa una variable dependiente en función de una o más variables independientes. Generalmente, tiene la forma $y = f(x)$, donde y representa la variable dependiente y $f(x)$ es una función bien definida que describe cómo y varía con respecto a x . Esta claridad en la representación faculta que los valores de y puedan calcularse fácilmente para cualquier valor dado de x .

Las ecuaciones explícitas de primer orden presentan varias propiedades características que son fundamentales para su estudio y aplicación. En primer lugar, pueden ser lineales o no lineales, dependiendo de la forma de la función $f(x)$. Las ecuaciones lineales son aquellas en las que la función es de primer grado, como $y = mx + b$, mientras que las no lineales pueden incluir términos cuadráticos, cúbicos o cualquier otro tipo de función que no siga esta forma lineal (Varona, 1996).

Otra propiedad importante es que estas ecuaciones pueden ser unidimensionales, donde una sola variable independiente se relaciona con una variable dependiente, o multidimensionales, donde múltiples variables

independientes interactúan para determinar el valor de y . A su vez, las ecuaciones explícitas facilitan derivar fácilmente la pendiente de la función, lo cual es esencial en el análisis de tasas de cambio y en la comprensión de la relación entre las variables. Para ilustrar mejor el concepto de ecuaciones explícitas de primer orden, consideremos algunos ejemplos prácticos:

- i. *Ecuación lineal:* $y = 2x + 3$. En este caso, para cada valor de x , podemos calcular rápidamente el correspondiente valor de y . La pendiente de la función es 2, lo que indica que por cada unidad que aumenta x , y todavía aumenta en 2 unidades.
- ii. *Ecuación cuadrática:* $y = x^2 - 4x + 5$. Aunque es una ecuación no lineal, sigue siendo explícita, ya que y está expresado directamente en función de x . Podemos encontrar los valores de y para diferentes x y analizar la forma de la parábola resultante.
- iii. *Ecuación exponencial:* $y = e^{0.5x}$. Este ejemplo muestra cómo las ecuaciones explícitas pueden incluir funciones exponenciales, que son comunes en diversos contextos, como el crecimiento poblacional o la acumulación de intereses.

Estos ejemplos demuestran la versatilidad y utilidad de las ecuaciones explícitas de primer orden en diferentes contextos matemáticos y científicos, proporcionando una base sólida para el análisis y la resolución de problemas en diversas disciplinas. El método gráfico consiste en representar la ecuación en un plano cartesiano y observar las intersecciones con los ejes o entre las curvas. Para resolver una ecuación explícita de primer orden, se puede graficar la función que representa la ecuación y analizar cómo se comporta en diferentes intervalos.

Este método es particularmente útil para visualizar soluciones y entender la naturaleza de la función. Para ilustrar, si tenemos una ecuación lineal como $y = mx + b$, podemos trazar la recta y encontrar fácilmente la solución en los puntos donde esta cruza el eje x o y . Sin embargo, este método puede ser limitado en precisión y es menos efectivo para ecuaciones más complejas o no lineales.

El método algebraico implica manipular la ecuación para despejar la variable dependiente, este proceso puede incluir operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, así como la aplicación de propiedades algebraicas. En particular, para una ecuación explícita simple como $y = 2x + 3$, se puede despejar x si se necesita encontrar el valor de x en función de y . Este enfoque es más directo y puede proporcionar resultados más precisos, especialmente cuando se utilizan técnicas de factorización o sustitución. Sin embargo, algunas ecuaciones pueden ser más complicadas y requerir más tiempo y esfuerzo en su resolución.

En la era digital, el uso de software para resolver ecuaciones explícitas de primer orden se ha vuelto cada vez más común. Existen diversas herramientas y programas, como MATLAB, Python con bibliotecas como NumPy y SciPy, o incluso calculadoras gráficas avanzadas, que consienten a los usuarios ingresar ecuaciones y obtener soluciones de manera rápida y eficiente. Estas herramientas son especialmente valiosas para ecuaciones que son difíciles de resolver a mano o que requieren cálculos extensos. El uso de software no solo acelera el proceso de resolución, sino que todavía minimiza errores humanos y facilita realizar análisis más complejos, como la simulación de diferentes escenarios o el estudio de la sensibilidad de las soluciones ante variaciones en los parámetros.

Por ende, la elección del método de resolución de ecuaciones explícitas de primer orden dependerá del tipo de ecuación, la complejidad del problema y la preferencia del usuario. Cada uno de estos métodos ofrece herramientas valiosas para abordar y resolver ecuaciones en diversos contextos. Las ecuaciones explícitas de primer orden son herramientas matemáticas fundamentales que encuentran aplicaciones en diversas disciplinas. Su capacidad para modelar relaciones simples y directas entre variables las convierte en un recurso valioso en campos como la física, la economía y la ingeniería.

En la física, las ecuaciones explícitas de primer orden son utilizadas para describir fenómenos que involucran relaciones lineales. En efecto, en la cinemática, la ecuación de posición de un objeto en movimiento rectilíneo uniforme puede expresarse como $x(t) = x_0 + vt$, donde $x(t)$ es la posición en el tiempo t , x_0 es la posición inicial y v es la

velocidad constante. Estas ecuaciones facultan predecir el comportamiento de los objetos en movimiento y son esenciales en la resolución de problemas relacionados con la trayectoria y el desplazamiento.

En el ámbito económico, las ecuaciones explícitas de primer orden son frecuentemente utilizadas para modelar relaciones entre variables económicas. Un ejemplo clásico es la función de demanda, que puede representarse como $D(p) = a - bp$, donde D es la cantidad demandada, p es el precio del bien, y a y b son constantes que reflejan la relación entre precio y cantidad. Estas ecuaciones posibilitan a los economistas analizar el comportamiento del mercado y facilitan la toma de decisiones sobre precios y producción.

La ingeniería de igual manera se beneficia de las ecuaciones explícitas de primer orden, especialmente en áreas como la ingeniería eléctrica y mecánica. Así como, en circuitos eléctricos, la ley de Ohm puede expresarse como $V = IR$, donde V es la tensión, I es la corriente y R es la resistencia. Esta relación es fundamental para el diseño y análisis de circuitos. En la ingeniería mecánica, las ecuaciones que describen la relación entre fuerza, masa y aceleración, como $F = ma$, son ejemplos de cómo estas ecuaciones se aplican para resolver problemas prácticos.

En contexto, las ecuaciones explícitas de primer orden son herramientas versátiles que se aplican en múltiples disciplinas para modelar y resolver problemas de manera efectiva. Su capacidad para representar relaciones directas entre variables las hace indispensables en la física, la economía y la ingeniería, contribuyendo así al avance de estas áreas del conocimiento.

3.4 Crecimiento logístico

El término correcto en dinámica de poblaciones es “crecimiento logístico” (no “logit”). El “logit” es una transformación estadística usada en regresión logística, el término logístico aparece como autorregulación intraespecífica en modelos de comunidades. Es decir, en sistemas de Lotka–Volterra generalizados, la autorregulación $a_{ii} < 0$ induce estabilización y reemplaza las oscilaciones neutrales del caso depredador–presa ideal por atracción a estados estacionarios, bajo condiciones de estabilidad global. Esto

justifica añadir términos “logísticos” (densodependencia negativa) al modelar interacciones multiespecie para obtener dinámica realista y estable (Gopalsamy, 1986).

Además, cuando la interacción entre especies y la retroalimentación ecológica son no lineales y saturantes, la estabilidad y diversidad del equilibrio aumentan respecto al caso lineal clásico, mitigando inestabilidades en comunidades complejas; en términos prácticos, respuestas saturantes pueden desempeñar un papel análogo a una “capacidad efectiva” que acota el crecimiento y estabiliza la comunidad (Sidhom y Galla, 2019). El crecimiento logístico se recomienda en los siguientes casos:

- Si analizas series temporales de una sola población con claro límite de recursos, comienza con el modelo logístico clásico y evalúa residuales.
- Si observas asimetría marcada o punto de inflexión, prueba una sigmoide generalizada tipo Birch para conservar el régimen exponencial inicial y mejorar el ajuste.
- Si el sistema exhibe agregación espacial o dispersión local, emplea una formulación logística espacial o de momentos; el modelo no espacial puede sesgar tasas y capacidades efectivas.
- En comunidades, incorpora autorregulación (términos “logísticos”) y considera no linealidades saturantes para robustecer la estabilidad del equilibrio.

El crecimiento logístico clásico ignora la estructura espacial, con dispersión y competencia local, pues, el crecimiento efectivo puede desviarse fuertemente del modelo no espacial: tasas máximas a densidades distintas, densidades asintóticas mayores o menores, e incluso extinción bajo ciertos patrones espaciales. Estos efectos emergen al modelar momentos espaciales o mediante modelos individuales con clausuras apropiadas. En consecuencia, si hay agregación o repulsión espacial, conviene emplear una versión logística espacial o aproximaciones de momentos para obtener predicciones realistas (Calvo et al., 2025).

El crecimiento exponencial solo es posible cuando hay un recurso natural interminable; esto no sucede en el mundo real, así, Charles Darwin se dio

cuenta de esta realidad en la descripción de su "lucha por la existencia", que declaró que las personas competirían (con miembros de su especie u otras) por recursos limitados. Las personas exitosas existirán para transmitir sus propias características y características (que ahora sabemos que son transmitidas por genes) en una generación más alta a una velocidad mayor: un proceso llamado selección natural, y ara simular los recursos reales, el entorno ha desarrollado un modelo de desarrollo logístico.

El modelo de logística muestra que todos en la población tendrán el mismo acceso a los recursos y, por lo tanto, sobrevivientes similares, pues, la diferencia de fenotipos en las personas muestra que algunas se adaptarán mejor al entorno que otras, da la capacidad de los resultados entre los miembros de la misma población para recursos (capacidad). La competencia interna en los recursos puede no afectar a la población mucho más baja que su carga, porque los recursos son ricos y todos pueden obtener lo que necesitan. No obstante, a medida que aumentó la población, esta competencia se fortaleció, por lo que la acumulación de residuos puede reducir la carga del entorno.

Capítulo IV

Ecuaciones en las que la derivada aparece implícitamente

Las ecuaciones implícitas son una parte fundamental del estudio del cálculo y la geometría analítica. A diferencia de las ecuaciones explícitas, donde una variable se expresa claramente en función de otra, las ecuaciones implícitas presentan una relación más compleja entre las variables, lo que puede dificultar su análisis y representación gráfica. En este contexto, la capacidad de trabajar con derivadas implícitas se convierte en una herramienta esencial para matemáticos y estudiantes, ya que faculta extraer información valiosa sobre el comportamiento de funciones que no pueden ser fácilmente descritas de manera directa.

En las ecuaciones implícitas, generalmente se tiene una relación de la forma $F(x, y) = 0$, donde F es una función que involucra tanto a x como a y . Esta forma de expresar relaciones entre variables es común en diversas aplicaciones de la matemática, incluyendo la física, la economía y la ingeniería. La derivación implícita surge como un método poderoso para encontrar la tasa de cambio de una variable respecto a otra en el contexto de estas ecuaciones, este enfoque no solo amplía nuestra comprensión de las funciones, sino que incluso facilita la solución de problemas en los que no es posible despejar una variable de manera directa (Nova, 2016).

Las ecuaciones implícitas son aquellas que no expresan directamente una variable en términos de otra; en vez de ello, relacionan dos o más variables. Por medio de una igualdad, en efecto, la ecuación de un círculo, $x^2 + y^2 = r^2$, se considera implícita porque no podemos despejar y de forma sencilla para expresar y como una función de x . Esta forma de representar relaciones entre variables es fundamental en diversas áreas de las matemáticas, especialmente en el cálculo y la geometría.

4.1 Ecuaciones explícitas e implícitas

El concepto de ecuaciones implícitas se centra en la idea de que las relaciones entre las variables pueden ser más complejas y no siempre se prestan a una forma explícita. Una ecuación implícita puede contener múltiples variables y puede describir curvas, superficies, y otras formas geométricas que no se pueden representar fácilmente en una forma $(y = f(x))$. Estas ecuaciones brindan un marco para la comprensión de fenómenos que no se pueden descomponer en una única función.

La diferencia principal entre ecuaciones explícitas e implícitas radica en la forma en que se presenta la relación entre las variables. En una ecuación explícita, como $(y = mx + b)$, la variable dependiente (y) se aísla y se expresa directamente en función de la variable independiente (x) . Por otro lado, en una ecuación implícita, como $(F(x, y) = 0)$, ambas variables están interrelacionadas de manera más compleja, lo que puede dificultar el aislamiento de una variable sobre la otra.

En geometría, las ecuaciones implícitas son esenciales para describir formas y curvas que no se limitan a funciones lineales o polinomiales simples. Para ilustrar, muchas superficies en el espacio tridimensional se describen mediante ecuaciones implícitas, lo que faculta una representación más rica y diversa de la geometría. Además, el estudio de estas ecuaciones abre la puerta a la exploración de conceptos más avanzados, como las variedades y las superficies diferenciables, que son fundamentales en campos como la topología y la geometría diferencial.

Ahora bien, las ecuaciones implícitas son una herramienta poderosa en el arsenal matemático, ofreciendo una forma de abordar problemas complejos y enriqueciendo nuestra comprensión de las relaciones entre variables. La derivación implícita es una técnica fundamental en el cálculo, especialmente cuando se trabaja con ecuaciones en las que la variable dependiente no está aislada.

La regla de la cadena es un principio esencial en la derivación, y su aplicación en el contexto de ecuaciones implícitas nos faculta calcular derivadas sin necesidad de despejar la variable dependiente (Jara, 2016). Cuando se tiene una ecuación que relaciona dos o más variables, como $(F(x,$

$y) = 0$), donde y es una función de x , la derivada de esta ecuación con respecto a x se puede calcular utilizando la regla de la cadena de la siguiente manera:

- **Derivamos $F(x, y)$ con respecto a x :** esto implica usar la regla de la cadena para la parte que involucra y , ya que y es una función de x . Por lo tanto, al derivar F con respecto a x , se obtiene $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.
- **Igualemos esta derivada a cero:** ya que $F(x, y) = 0$ es constante. Esto nos dará una ecuación que podemos resolver para $\frac{dy}{dx}$.

Este método es especialmente útil para ecuaciones complicadas donde despejar y podría ser difícil o imposible. Veamos un par de ejemplos para ilustrar el proceso de derivación implícita:

- i. *Ejemplo 1:* Consideremos la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, que representa un círculo de radio 5. Para encontrar $\frac{dy}{dx}$:

- Derivamos ambos lados con respecto a x :

[

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

]

- Despejamos $\frac{dy}{dx}$:

[

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

]

- ii. *Ejemplo 2:* Tomemos la ecuación $e^x + y^2 = 3y$. Al derivar, obtenemos:

- Derivando:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(e^x + 2y) = \frac{d}{dx}(3y) \\ & e^x + 2 \frac{dy}{dx} = 3 \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

- Reorganizando:

$$\begin{aligned} & e^x = 3 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} \implies e^x = (3 - 2y) \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

- Finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{3 - 2y}$$

Estos ejemplos muestran cómo la derivación implícita facilita encontrar la derivada sin necesidad de expresar y en términos de x . La derivación implícita tiene numerosas aplicaciones prácticas en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. Algunas de estas aplicaciones incluyen:

- **Modelado de fenómenos físicos:** Muchas leyes de la física se expresan como ecuaciones implícitas que describen la relación entre diferentes variables. En particular, la ecuación de estado de un gas ideal puede ser tratada de esta manera.

- **Optimización:** En problemas de optimización donde las variables están interrelacionadas, como en la economía o la biología, la derivación implícita facilita encontrar tasas de cambio que son esenciales para maximizar o minimizar funciones.

- **Geometría analítica:** La derivación implícita se utiliza para determinar pendientes de tangentes a curvas no necesariamente expresadas en forma explícita, facilitando el estudio de sus propiedades geométricas.

La comprensión y aplicación de la derivación implícita no solo es crucial para resolver problemas matemáticos, sino que también es fundamental en la aplicación de conceptos en diversas disciplinas científicas. Uno de los errores más comunes al trabajar con derivadas implícitas es la falta de atención a la regla de la cadena. Esto ocurre cuando los estudiantes no consideran que una variable puede depender de otra. Así como, al derivar una función como $F(x, y) = 0$, es crucial recordar que y es una función de x , lo que implica que al derivar y respecto a x se debe aplicar la regla de la cadena.

Otro error frecuente es el descuido en el manejo de los signos, en ocasiones, los estudiantes pueden olvidar cambiar el signo al trasladar términos de un lado de la ecuación al otro, lo que puede llevar a resultados incorrectos en la derivada final. Para abordar las ecuaciones implícitas de manera efectiva, es útil seguir un enfoque sistemático. Aquí hay algunos consejos prácticos:

- i. *Identificar claramente la variable dependiente:* Antes de comenzar a derivar, asegúrate de saber cuál variable se considera dependiente y cuál es independiente. Esto ayudará a aplicar correctamente la regla de la cadena.
- ii. *Realizar pasos intermedios:* No dudes en escribir cada paso de la derivación de manera explícita. Esto facilitará la detección de errores y permitirá comprender mejor el proceso de derivación.
- iii. *Verificar resultados:* Después de obtener una derivada implícita, es recomendable verificar los resultados sustituyendo valores conocidos o utilizando otras técnicas de derivación, si es posible.
- iv. *Practicar con ejemplos diversos:* La práctica es esencial para dominar la derivación implícita. Trabajar con una variedad de ejemplos te ayudará a familiarizarte con diferentes formas de ecuaciones y sus derivadas.

Existen diversas herramientas y recursos que pueden facilitar el aprendizaje y la práctica de las derivadas implícitas. Algunas de estas incluyen:

- i. *Software de cálculo simbólico:* Programas como Wolfram Alpha, MATLAB o GeoGebra pueden ayudar a visualizar ecuaciones y verificar derivadas. Estas herramientas son útiles para comprobar el trabajo y explorar diferentes ecuaciones implícitas.
- ii. *Tutoriales en línea:* Plataformas como Khan Academy y YouTube ofrecen tutoriales detallados sobre la derivación implícita, lo que puede ser especialmente útil para quienes prefieren el aprendizaje visual.
- iii. *Libros de texto y guías de estudio:* Existen numerosos libros que abordan el cálculo y la derivación implícita. Buscar textos que incluyan ejemplos y ejercicios prácticos puede ser beneficioso para reforzar el aprendizaje.
- iv. *Grupos de estudio:* Colaborar con compañeros de clase o unirse a grupos de estudio facilita discutir problemas y soluciones, lo que puede enriquecer la comprensión de las ecuaciones implícitas.

El uso de la derivación implícita facilita a matemáticos y científicos calcular derivadas de funciones que no están expresadas de manera directa. Por medio de la regla de la cadena y ejemplos ilustrativos, hemos demostrado que este método es no solo efectivo, sino también esencial en diversas aplicaciones prácticas, como en la física y la ingeniería, donde las relaciones entre variables a menudo son intrincadas y no lineales. La identificación de estos errores y la discusión de estrategias para evitarlos son pasos importantes para cualquier estudiante o profesional que se enfrente a este tipo de ecuaciones. Con las herramientas y recursos adecuados, es posible dominar la derivación implícita y aplicarla con confianza.

4.2 Ecuación de Lagrange y Clairaut: Teoría y Aplicaciones Prácticas en R

Las ecuaciones diferenciales son herramientas fundamentales en la matemática aplicada y teórica, utilizadas para modelar una amplia variedad de fenómenos en física, ingeniería, economía y muchas otras disciplinas. Entre las diferentes clases de ecuaciones diferenciales, las ecuaciones de Lagrange y Clairaut ocupan un lugar destacado debido a su relevancia y características particulares. La ecuación de Lagrange, conocida como

ecuación diferencial de primer orden, faculta resolver problemas donde la derivada de una función depende de la función misma y de la variable independiente. Este tipo de ecuación se presenta frecuentemente en problemas de dinámica y en la descripción de sistemas físicos, donde las relaciones entre variables pueden expresarse de forma explícita o implícita (Moya y Rojas, 2020).

Por otro lado, la ecuación de Clairaut es una forma específica de ecuación diferencial que se presenta como una ecuación de primer orden en la que la derivada de la función depende de la función misma de manera lineal (Varona, 1996). Esta ecuación es especialmente interesante porque faculta la existencia de soluciones múltiples, lo que la convierte en un caso de estudio fascinante en el ámbito de las ecuaciones diferenciales. La ecuación de Lagrange es un tipo de ecuación diferencial que juega un papel fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación de Lagrange, o más formalmente conocida como la ecuación diferencial de Lagrange, es una ecuación de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

donde y' representa la derivada de y respecto a x , y $f(x, y)$ es una función continua y diferenciable. Esta ecuación se utiliza para describir sistemas donde la tasa de cambio de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente x está relacionada de manera directa con los valores de ambas variables.

El origen de la ecuación de Lagrange se remonta al trabajo del matemático y físico Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII, quien hizo contribuciones significativas al desarrollo de la mecánica analítica y la teoría de funciones. Su enfoque en describir el movimiento de los cuerpos y las trayectorias de las partículas llevó al establecimiento de esta ecuación como un modelo para resolver problemas de dinámica y otras áreas de la física. La ecuación de Lagrange se caracteriza por varias propiedades importantes que facilitan su estudio y resolución:

- i. *Linealidad:* La ecuación es lineal si la función $f(x, y)$ puede expresarse como una combinación lineal de y y sus derivadas, lo que facilita aplicar métodos algebraicos más simples para encontrar soluciones.
- ii. *Superposición de soluciones:* En el caso de ecuaciones lineales, si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación de Lagrange, entonces cualquier combinación lineal de estas soluciones también será una solución.
- iii. *Existencia y unicidad:* Bajo ciertas condiciones de continuidad y diferenciabilidad, la teoría de la existencia y unicidad garantiza que para cada valor inicial dado, existe una única solución de la ecuación de Lagrange en un intervalo alrededor de dicho valor inicial.
- iv. *Métodos de resolución:* Existen múltiples métodos para resolver ecuaciones de Lagrange, incluyendo el método de separación de variables, el uso de factores integrantes y la transformación a un sistema de ecuaciones más manejables.

La ecuación de Lagrange se utiliza en una amplia variedad de campos, incluyendo la física, la ingeniería y las ciencias sociales. Algunos ejemplos de aplicaciones son:

- **Modelado de sistemas dinámicos:** Se utiliza para describir el movimiento de partículas y cuerpos en diferentes contextos, como en mecánica clásica y en la teoría de control
- **Problemas de crecimiento poblacional:** Puede modelar el crecimiento de poblaciones en ecología, donde la tasa de cambio de una población está relacionada con su tamaño actual y otros factores ambientales.
- **Economía:** En economía, se aplica para modelar el comportamiento de variables económicas, como la oferta y la demanda, donde la tasa de cambio de una variable económica depende de otras variables del sistema.

Total, la ecuación de Lagrange es una herramienta poderosa en el análisis matemático y sus aplicaciones prácticas son numerosas. Su comprensión es esencial para abordar problemas en diversas disciplinas que involucran relaciones dinámicas entre variables. La ecuación de Clairaut es

un tipo particular de ecuación diferencial que juega un papel fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos y en la resolución de problemas matemáticos en diversas áreas. La ecuación de Clairaut se puede expresar en la forma general:

$$y = ax + f'(y)$$

donde y es la variable dependiente, x es la variable independiente, a es una constante y $f'(y)$ representa la derivada de una función f con respecto a y . Esta ecuación se caracteriza por ser de primer orden y tiene la particularidad de que la variable dependiente y aparece de manera lineal en la ecuación.

El origen de esta ecuación se remonta al trabajo del matemático francés Alexis Clairaut en el siglo XVIII, quien la utilizó para abordar problemas de mecánica y dinámica. La simplicidad de su forma faculta una amplia variedad de aplicaciones, desde la física hasta la ingeniería, las soluciones de la ecuación de Clairaut son bastante interesantes, ya que se pueden clasificar en dos tipos: las soluciones generales y las soluciones particulares (Sánchez y García, 2019).

- i. *Soluciones generales:* Estas son las soluciones que se obtienen al resolver la ecuación diferencial sin imponer condiciones iniciales. Para una ecuación de Clairaut, la solución general a menudo se presenta en forma de una función que puede incluir un parámetro arbitrario.
- ii. *Soluciones particulares:* Estas son soluciones específicas que se obtienen al aplicar condiciones iniciales o restricciones adicionales a la solución general. En el caso de las ecuaciones de Clairaut, se pueden encontrar múltiples soluciones particulares que satisfacen las mismas condiciones iniciales, lo que refleja la naturaleza no única de estas ecuaciones.

Para ilustrar la aplicación de la ecuación de Clairaut, consideremos un ejemplo práctico. Supongamos que queremos resolver la ecuación:

$$[y = 2x + C]$$

donde (C) es una constante. En este caso, la solución general está dada por la familia de líneas rectas con pendiente 2. Para obtener una solución particular, podemos fijar $(C = 1)$, lo que nos dará la línea $(y = 2x + 1)$.

Ahora, presentaremos ejemplos de cómo implementar la resolución de ecuaciones de Clairaut en R, lo que permitirá a los lectores visualizar y comprender mejor estas soluciones en un contexto práctico y computacional. Para resolver ecuaciones diferenciales en R, podemos utilizar varias bibliotecas que proporcionan funciones específicas. A continuación, ejemplos de resolución de Lagrange y Clairaut en R:

i. *Ejemplo 1: Ecuación de Lagrange*

Supongamos que queremos resolver la ecuación diferencial de Lagrange de la forma:

$$[y' = xy + y^2]$$

Podemos definir esta ecuación en R y utilizar la función `ode` de la biblioteca `deSolve` para encontrar la solución.

R

Cargar la biblioteca

```
library(deSolve)
```

Definir la función del modelo

```
lagrange_eq <- function(t, y, parameters) {
```

```

dy <- y[2] t + y[1]^2
return(list(c(dy)))
}

Valores iniciales
yini <- c(y = 1) valor inicial de y
times <- seq(0, 5, by = 0.1) rango de tiempo

Resolver la ecuación
output <- ode(y = yini, times = times, func = lagrange_eq, parms = NULL)

Graficar los resultados
plot(output[, 1], output[, 2], type = "l", col = "blue", xlab = "Tiempo", ylab =
"y(t)", main = "Solución de la Ecuación de Lagrange")

```

Este código define la ecuación, establece condiciones iniciales y utiliza la función ode para resolver la ecuación diferencial, generando una gráfica de la solución.

ii. *Ejemplo 2:* Ecuación de Clairaut

La ecuación de Clairaut tiene la forma general:

$$\textcolor{red}{\backslash[y = xy' + f(y') \backslash]}$$

Para ilustrar su solución en R, consideremos una función específica. Supongamos que queremos resolver la ecuación:

$$\textcolor{red}{\backslash[y = xy' + (y')^2 \backslash]}$$

Podemos utilizar un enfoque similar al anterior. En seguida se muestra un ejemplo de código:

R

Definir la función para la ecuación de Clairaut

```
clairaut_eq <- function(t, y, parameters) {  
  Suponiendo que  $y' = 2$   
  y_prime <- 2  
  return(list(c(y = y_prime)))  
}
```

Condiciones iniciales

```
yini_clairaut <- c(y = 0)  valor inicial de y  
times_clairaut <- seq(0, 5, by = 0.1)
```

Resolver la ecuación

```
output_clairaut <- ode(y = yini_clairaut, times = times_clairaut, func =  
clairaut_eq, parms = NULL)
```

Graficar los resultados

```
plot(output_clairaut[, 1], output_clairaut[, 2], type = "l", col = "red", xlab =  
"Tiempo", ylab = "y(t)", main = "Solución de la Ecuación de Clairaut")
```

En este caso, hemos definido un valor constante para (y') y graficado la solución de la ecuación de Clairaut. Estos ejemplos ilustran cómo se pueden implementar y resolver las ecuaciones de Lagrange y Clairaut en R de manera efectiva, permitiendo a los usuarios explorar y aplicar estas importantes herramientas matemáticas en sus proyectos y estudios. La ecuación de Lagrange, con su enfoque en la forma canónica, ha demostrado

ser una herramienta poderosa en la resolución de problemas que requieren una formulación adecuada de las variables involucradas.

Por otro lado, la ecuación de Clairaut nos ha permitido apreciar la belleza y complejidad de las soluciones que pueden surgir a partir de una simple formulación. La distinción entre soluciones generales y particulares resalta la rica estructura que subyace a las ecuaciones diferenciales y su capacidad para modelar fenómenos del mundo real. La implementación de estas ecuaciones en R ha sido un aspecto crucial de nuestro análisis, dado que el software proporciona un entorno accesible para llevar a cabo cálculos complejos y visualizar resultados de manera efectiva. Los ejemplos de código presentados no solo ilustran la aplicabilidad práctica de las teorías discutidas, sino que todavía empoderan a los lectores para que experimenten y profundicen en su comprensión de las ecuaciones de Lagrange y Clairaut.

4.3 Integrales Indefinidas en R: Métodos Básicos y Aplicaciones Prácticas

Las integrales indefinidas son un concepto fundamental en el campo del cálculo y el análisis matemático. En términos simples, una integral indefinida representa el conjunto de todas las funciones antiderivadas de una función dada. Esto significa que, si tenemos una función $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ se denota como $F(x) + C$, donde $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$ y C es una constante arbitraria. Este concepto no solo es crucial para resolver problemas matemáticos, sino que incluso tiene aplicaciones prácticas en diversas disciplinas, como la física, la ingeniería y la economía.

La importancia de las integrales indefinidas radica en su capacidad para permitirnos calcular áreas bajo curvas, resolver ecuaciones diferenciales y modelar fenómenos en el mundo real. Conviene destacar, en física, la integral de la velocidad nos da la posición de un objeto en movimiento, aun cuando en economía, las integrales se utilizan para calcular el costo total a partir de la función de costo marginal. Así, dominar el cálculo de integrales indefinidas es esencial para cualquier estudiante o profesional que desee profundizar en el análisis matemático.

En la actualidad, el uso de software de programación y análisis de datos, como R, ha facilitado enormemente el proceso de cálculo de integrales. R proporciona herramientas y paquetes que admiten realizar integraciones de manera eficiente, lo que no solo ahorra tiempo, sino que de igual manera reduce la posibilidad de errores en los cálculos manuales. Para Jácome (2022), el método de integración por sustitución es una técnica fundamental en el cálculo de integrales indefinidas, que faculta simplificar la integral en situaciones donde la función a integrar es compleja. Este método se basa en la idea de realizar un cambio de variable que facilite el proceso de integración, transformando la integral original en una forma más manejable. La integración por sustitución se fundamenta en la regla básica de la derivada, que establece que si $u = g(x)$ es una función derivable, entonces $du = g'(x)dx$. Al aplicar esta técnica, se elige una función u de tal manera que la integral se simplifique. El proceso general implica los siguientes pasos:

- i. *Elegir la sustitución:* Identificar una parte de la integral que se puede reemplazar por u .
- ii. *Calcular du :* Derivar la función elegida para obtener du .
- iii. *Reescribir la integral:* Sustituir u y du en la integral original.
- iv. *Integrar:* Resolver la nueva integral en términos de u .
- v. *Volver a la variable original:* Sustituir u de nuevo por la expresión original al final.

Este método es especialmente útil en integrales que presentan funciones compuestas, donde la derivada de la función interna está presente en la integral. Para ilustrar la aplicación del método de integración por sustitución en R, consideremos la integral indefinida:

$$\int 2x \cdot e^{x^2} \, dx$$

- i. *Elegir la sustitución:* En este caso, podemos elegir $(u = x^2)$.
Entonces, $(du = 2x \, dx)$.
- ii. *Reescribir la integral:* Reemplazamos en la integral:

[

$$\int 2x \cdot e^{x^2} \, dx = \int e^u \, du$$

]

- iii. *Integrar:* La integral de (e^u) es simplemente $(e^u + C)$,
donde (C) es la constante de integración.
- iv. *Volver a la variable original:* Sustituyendo (u) de nuevo:

[

$$e^{x^2} + C$$

]

En R, podemos realizar esta operación utilizando el paquete Ryacas para el cálculo simbólico. Aquí está el código que podríamos utilizar:

R

```
library(Ryacas)
```

Definir la función a integrar

```
f <- expression(2 * x * exp(x^2))
```

Calcular la integral

```
integral_result <- yacas(paste("Integrate(", deparse(f), ", x")))
```

```
integral_result
```

El resultado debería mostrar $\int (e^{x^2} + C) dx$ como la integral calculada. No obstante el método de integración por sustitución es poderoso, tiene sus limitaciones. No todas las integrales pueden ser resueltas mediante este método; a veces, la elección de la función u puede no ser obvia, es esencial que el cambio de variable mantenga la relación funcional entre la variable original y la nueva.

Es importante también recordar que algunas integrales pueden requerir múltiples pasos de sustitución o incluso la combinación de diferentes métodos de integración. Por lo tanto, es recomendable practicar con una variedad de funciones y situaciones para familiarizarse con las mejores estrategias a emplear. Por ende, la integración por sustitución es una herramienta valiosa en el cálculo de integrales indefinidas y es fundamental dominarla para abordar problemas más complejos en análisis matemático. El método de integración por partes es otra técnica fundamental en el cálculo de integrales indefinidas, derivada de la regla del producto de la derivación. Este método se basa en la siguiente fórmula:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

donde u y dv son partes de la función que estamos integrando. Elegir adecuadamente u y dv es clave para facilitar el proceso de integración.

El teorema de integración por partes establece que si u es una función diferenciable y dv es una función integrable, entonces podemos transformar la integral de un producto de funciones en una combinación de integrales que pueden ser más sencillas de resolver. Esta técnica es especialmente útil cuando la integral original es complicada, pero el resultado de una de las integrales resultantes es más simple. La elección de

$\int u \, dv$ y $\int dv$ se puede guiar por la regla de LIATE (Logaritmos, Inversas, Álgebra, Trigonométricas, Exponenciales), que sugiere el orden en que deberíamos elegir u y dv .

Para implementar el método de integración por partes en R, utilizaremos la función `integrate()` que forma parte del paquete base. Consideremos un ejemplo clásico: la integral de $\int x e^x \, dx$.

i. Definimos la función a integrar:

R

```
f <- function(x) x * exp(x)
```

ii. Aplicamos la integración por partes usando la fórmula mencionada: En este caso, vamos a elegir $u = x$ (de donde $du = dx$) y $dv = e^x \, dx$ (de donde $v = e^x$).

iii. Ahora, aplicamos la fórmula:

[

$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx$

]

iv. En R, podemos calcularlo así:

R

```
integral_result <- function(x) {  
  x * exp(x) - exp(x)
```

}

integrate(integral_result, lower = 0, upper = Inf)\$value

Al igual que con otros métodos de integración, la integración por partes tiene sus limitaciones; a veces, la elección de u y dv puede no ser evidente y puede llevarnos a integrales que no son más simples que la original. En tales casos, puede ser útil aplicar el método varias veces o combinarlo con otros métodos de integración. Es recomendable practicar con diferentes tipos de funciones para familiarizarse con la selección de u y dv . La práctica constante permitirá reconocer patrones y situaciones donde este método es el más adecuado.

En síntesis, el método de integración por partes es una herramienta poderosa en el cálculo de integrales indefinidas, su correcta aplicación y conocimiento de sus limitaciones hacen que sea esencial en el análisis matemático, especialmente al utilizar R para resolver problemas complejos. La integración por fracciones parciales es un método poderoso y muy utilizado en el cálculo de integrales indefinidas, especialmente aquellas que involucran funciones racionales (Jara, 2017). Este método se basa en la descomposición de una fracción racional en una suma de fracciones más simples, lo que facilita su integración.

El primer paso en el método de fracciones parciales es asegurarse de que el grado del polinomio en el numerador sea menor que el grado del polinomio en el denominador. Si este no es el caso, se debe realizar una división polinómica para simplificar la fracción. Una vez que se tiene una fracción donde el numerador tiene un grado menor que el denominador, se procede a descomponerla en fracciones parciales. En efecto, dado un polinomio de la forma:

$[$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$

$]$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, podemos expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como la suma de fracciones más simples, es decir:

$$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \dots$$

Una vez que se determina esta descomposición, cada término puede integrarse de forma independiente. Los coeficientes $A, B, \dots$ se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones que resulta de igualar las dos expresiones (la original y la descompuesta). Para ilustrar el método de integración por fracciones parciales en $\mathbb{R}$, consideremos la integral de la siguiente función racional:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx$$

Primero, descomponemos el denominador:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Por lo tanto, podemos escribir:

\[

$$\frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x + 1)}$$

\]

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $((x - 2)(x + 1))$ y resolvemos para (A) y (B) . Al hacerlo, llegamos a un sistema de ecuaciones que podemos resolver:

R

```
library(pracma)
```

Definimos los coeficientes

```
A <- 2
```

```
B <- 5
```

Descomponemos la fracción

```
numerador <- function(x) { 2x + 3 }
```

```
denominador <- function(x) { (x - 2)(x + 1) }
```

```
integral <- function(x) { A/(x - 2) + B/(x + 1) }
```

Integramos

```
resultado <- integrate(integral, lower = -Inf, upper = Inf)
```

```
resultado$value
```

Este código en R nos permitirá calcular la integral de la función descompuesta. Recuerda que, al integrar cada fracción, obtenemos:

$\backslash$

$$\int \frac{A}{(x-2)} dx + \int \frac{B}{(x+1)} dx = A \ln|x-2| + B \ln|x+1| + C$$

$\backslash$

Al utilizar el método de fracciones parciales, es fácil cometer algunos errores comunes, entre los cuales destacan:

- i. *No simplificar correctamente el polinomio:* Asegúrate de que el numerador sea de menor grado que el denominador antes de aplicar la descomposición.
- ii. *Olvidar resolver el sistema de ecuaciones:* A menudo, los coeficientes $(A, B, \dots)$ se obtienen de manera incorrecta o incluso se omite este paso crítico.
- iii. *Mala integración de los términos:* Revisa que cada término se integre correctamente, ya que la forma de cada integral dependerá del tipo de fracción.
- iv. *Descuido con los logaritmos:* No olvides que al integrar fracciones de la forma $(\frac{1}{x})$, resultará en un logaritmo natural, lo que es fundamental en la respuesta final.

Dominar el método de fracciones parciales no solo mejora nuestra habilidad para resolver integrales, sino que también proporciona una base sólida para abordar problemas más complejos en el ámbito del cálculo. El dominio de los métodos básicos para calcular integrales indefinidas es fundamental para cualquier estudiante o profesional en el campo del análisis matemático. R, como lenguaje de programación y entorno para el análisis estadístico y matemático, ofrece potentes capacidades para llevar a cabo estos cálculos de manera eficiente. La familiaridad con la sintaxis y las funciones específicas de R facilita la implementación de los métodos de integración por sustitución, por partes y por fracciones parciales, lo que faculta a los usuarios realizar análisis más profundos y precisos (Ruiz y Puga, 2016).

Dominar estos métodos en R no solo incrementa la comprensión teórica, sino que también mejora la habilidad práctica para aplicar conceptos

matemáticos en situaciones del mundo real. La programación en R faculta realizar simulaciones, visualizar resultados y realizar análisis de sensibilidad, lo que enriquece el proceso de aprendizaje y la aplicación de las matemáticas.

En consecuencia, al enfrentar problemas matemáticos complejos, contar con una sólida base en los métodos de integración y su implementación en R se traduce en una ventaja competitiva. La integración de estos conocimientos en la práctica diaria no solo fomenta una mayor confianza en la resolución de problemas, sino que al igual abre puertas a nuevas oportunidades de investigación y desarrollo en diversas disciplinas. Por lo tanto, invertir tiempo en dominar estos métodos y sus aplicaciones en R es un paso esencial para cualquier aspirante a matemático, estadístico o científico de datos.

Conclusión

Se presentó un libro conciso y práctico para resolver EDOs en R con sintaxis clara, cubriendo casos típicos (no rígidos), sistemas, rigidez, problemas altamente oscilatorios, ajuste de parámetros a datos y control de error, y se incluyeron fragmentos de código reproducibles y recomendaciones informadas por la literatura numérica, con paquete principal para EDOs de valor inicial: deSolve (métodos explícitos e implícitos; con LSODA (esto significa que el usuario no tiene que determinar si el problema es rígido o no, y el solucionador elegirá automáticamente el método adecuado), es decir, que detecta rigidez automáticamente).

De la evidencia se deduce que una EDO rígida requiere pasos muy pequeños si se usan métodos explícitos; conviene métodos implícitos como BDF/Backward Differentiation o LSODA que alterna entre modos explícito/implícito. En tanto, deSolve, puede forzar BDF con `method = "bdf"`, o usar lsoda y dejar la detección automática. Por lo que escalar variables para mejorar la condición numérica y la estabilidad del método, es especialmente útil en sistemas con múltiples escalas. Es decir, si se observa inestabilidades o necesidad de pasos excesivamente pequeños, pruebe un método implícito y ajuste tolerancias `rtol`, `atol`.

Por otra parte, sistemas altamente oscilatorios pueden exigir pasos extremadamente pequeños si el método no preserva adecuadamente la dinámica. Por ende, seleccionar el integrador con cuidado y controlar el paso es decisivo. Para EDOs no suaves, métodos implícitos tipo Runge–Kutta e implementaciones con Newton “slanting” logran convergencia y eficiencia.

Ente sentido, si el término del campo vectorial depende de procesos estocásticos no suaves en el tiempo, los esquemas clásicos pierden orden; existen esquemas de mayor orden basados en expansiones de Taylor implícitas para convergencia “pathwise”. Ahora bien, para EDOs de orden superior, hay métodos de bloques de múltiples pasos que evitan reescritura a sistemas de primer orden y mejoran eficiencia en problemas lineales y no lineales. Entonces, marcos híbridos con redes neuronales y métodos en bloque buscan robustez y precisión incluso en problemas

rígidos/oscillatorios. Aunque R no es el entorno principal para “neural ODEs”, la literatura moderna sobre rigidez, reparametrización temporal y esquemas implícitos informa buenas prácticas de modelado y selección de integradores en cualquier plataforma.

Entre otros resultados de investigación, la dinámica compleja con especies adicionales o mecanismos de defensa: la inclusión de un carroñero que depreda y consume al depredador original puede inducir cascadas de duplicación de período y trayectorias acotadas, lo que ofrece un banco de pruebas pedagógico para análisis numérico y bifurcaciones. Miedo/defensa en la presa y difusión: modelos con defensa inducida, taxis indirecta y difusión exhiben inestabilidades. Así, la simulación requiere solvers estables y análisis de estabilidad lineal/no lineal cuidadosos. Los autores recomiendan ampliar la literatura con respuestas funcionales de interferencia (la forma Beddington–DeAngelis), que puede ajustar mejor datos experimentales que Runge-Kutta en presencia de interferencia entre depredadores, motivando su uso en aplicaciones.

Por otra parte, el método de Ralston, al ser un método de segundo orden, se sitúa en un punto intermedio, ofreciendo un compromiso favorable entre precisión y eficiencia, esto lo hace especialmente útil en situaciones donde se necesita una solución rápida, pero con una precisión razonable; presenta varias ventajas, así como algunas desventajas que es importante considerar al elegir un método para la resolución de EDOs.

En conclusión, como en cualquier método numérico, es crucial considerar los errores y la estabilidad, el error de truncamiento de un método de Adams-Bashforth se puede dividir en error local y error global. El error local se refiere a la discrepancia entre la solución exacta y la aproximación en un solo paso, mientras que el error global se acumula en múltiples pasos. En consecuencia, comparar el rendimiento del método de Adams-Bashforth con otros métodos de resolución de EDOs, como el método de Euler y los métodos de Runge-Kutta es fundamental, pues, aun cuando el método de Euler es simple y fácil de implementar, su precisión es limitada, especialmente para pasos grandes.

Bibliografía

- Alemu Wendimu, A., Matušů, R., Gazdoš, F. & Shaikh, I. (2025), A Comparative Study of One-Step and Multi-Step Numerical Methods for Solving Ordinary Differential Equations in Water Tank Drainage Systems. *Engineering Reports*, 7, e70080. <https://doi.org/10.1002/eng2.70080>
- Álvarez Texcotitla, M., y Álvarez Hernández, M.D. (2015). Una revisión crítica a los modelos básicos de crecimiento económico. *Denarius*, (29), 191-252
- Calvo-Monge, J., Espinoza, B., Sanchez, F., & Arroyo-Esquivel, J. (2025) The interplay between foraging choices and population growth dynamics. *PLoS One*, 20(6), e0325942. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0325942>
- Cevallos Ayon, E.R., y Cevallos Andagoya , N.M. (2025). Solución particular de una ecuación diferencial ordinaria de Cauchy Euler no homogénea de segundo orden aplicando el método ECA . *Revista Social Fronteriza*, 5(2), e-657. [https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5\(2\)657](https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5(2)657)
- Devia Narváez, D.M., Mesa, F., y Correa-Vélez, G. (2020). Comparación numérica por diferentes métodos (métodos Runge Kutta de segundo orden, método Heun, método de punto fijo y método Ralston) a ecuaciones diferenciales con condición inicial. *Scientia Et Technica*, 25(2), 299–305. <https://doi.org/10.22517/23447214.24446>
- Gopalsamy, K. (1986). Global asymptotic stability in a generalized Lotka-Volterra system. *International Journal of Systems Science*, 17, 447-451. <https://doi.org/10.1080/00207728608926819>
- Han, B., & Wang, Z. (2018). Turing Patterns of a Lotka-Volterra Competitive System with Nonlocal Delay. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 28, e1830021. <https://doi.org/10.1142/S0218127418300215>
- Herrera, C.J. (2024). Ecuaciones en fenómenos físicos. *Logos*, 11(22), 15-19
- Jácome, M. (2022). *Cálculo integral*. Quito: Jácome Automatización y Formación

- Jara, M.A. (2016). *Aplicaciones de la Derivada en economía y administración*. Samborondón: Universidad ECOTEC
- Jara, M.A. (2017). *Cálculo integral y sus aplicaciones en la empresa*. Samborondón: Universidad ECOTEC
- Liebeck, M. (2016). *A concise introduction to pure mathematics*. Boca Raton: Taylor & Francis Group
- Marrero, A., y Baguer, M.L. (2004). Estimación del error en cierta clase de métodos numéricos combinados de estrategia rectora. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 11(2), 71-85
- Molina-Mora, J.A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *UNICIENCIA*, 31(2), 19-36. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.31-2.2>
- Mosquera López, S. (2024). Los paquetes deSolve y phaseR para la resolución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con R. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, 24(2). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v24i2.7000>
- Moya, L.M., y Rojas, E. (2020). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: Técnicas de resolución*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia
- Nova García, C. (2016). Propuesta didáctica para la enseñanza de la derivación implícita, *Revista Katharsis*, 22, 339-361. <https://doi.org/10.25057/25005731.824>
- Pérez, J.L., Noguera, A.J. y Bastidas, F.E. (2022). *Métodos numéricos: Aplicaciones en Ingeniería y Ciencias básicas*. Buenos Aires: Puerto Madero Editorial Académica
- Pigolotti, S., López, C., y Hernández-García, E. (2007). Species clustering in competitive Lotka-Volterra models. *Physical review letters*, 98(25), e258101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.258101>
- Romero, S., Moreno, F.J., y Rodríguez, I.M. (2001). *Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's)*. Palos de la Frontera: Universidad de Huelva

RPubs. (10 de marzo de 2024). Lotka-Volterra. Rstudio. <https://rpubs.com/MGomez1/1220989>

Ruiz, A.M. y Puga, J.L. (2016). R como entorno para el análisis estadístico en evaluación psicológica. *Papeles del Psicólogo*, 37(1), 74-79

Sánchez, H.J., Heredia, F.I., Cevallos, J.J., y Moreno, G. (2024). *Métodos multipaso para PVI con MATLAB (Matemática, Física y Química)*. Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Sánchez, J. (2020). Modelos Lagrangianos para la simulación de fluidos y su aplicación a la hidrodinámica marina. *CIENCIA ergo-sum*, e105

Sánchez, J.A., y García, O. (2019). Ecuación de Clairaut, un desarrollo algebraico. *GIE Pensamiento Matemático*, 9(2), 97-107

Segarra, J. (2020). Métodos numéricos Runge-Kutta y Adams Bashforth-Moulton en mathematica. *Rev. Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 7(14), 13-32. <http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2020.v7.n14.a81>

Sidhom, L., & Galla, T. (2019). Ecological communities from random generalized Lotka-Volterra dynamics with nonlinear feedback. *Physical review. E*, 101(3), e032101 . <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.032101>

Sierociński, D., Chiliński, B., Gawiński, F., Radomski, A., & Przybyłowicz, P. (2025). *DynPy—Python Library for Mechanical and Electrical Engineering: An Assessment with Coupled Electro-Mechanical Direct Current Motor Model*. *Energies*, 18(2), 332. <https://doi.org/10.3390/en18020332>

Suescún Díaz, D., Narváez Paredes, M., Figueroa Jiménez, J.H., y Amador Rodríguez, A.F. (2013). Método Adams-Bashforth-Moulton para calcular la potencia nuclear. *El Hombre y la Máquina*, (42-43), 9-12

Varona, J.L. (1996). *Métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Logroño: Universidad de La Rioja

Vergel, M., Rincón, O.L., y Ibargüen, E. (2022). *Ecuaciones diferenciales y aplicaciones*. San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño

Yamauchi, A. (2025). Dynamic properties of Lotka–Volterra systems corresponding to the colonization model. *Mathematical Biosciences*, 387. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2025.109500>

De esta edición de **“Ecuaciones diferenciales ordinarias con sintaxis en R: Crecimiento exponencial, logístico y modelo depredador-presa”**, se terminó de editar en la ciudad de Colonia del Sacramento en la República Oriental del Uruguay el 20 de julio de 2025

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON SINTAXIS EN R:

Crecimiento exponencial,
logístico y modelo
depredador-presa

EST. 2021 **EMC**
EDITORIAL MAR CARIBE

WWW.EDITORIALMARCARIBE.ES

ISBN: 978-9915-698-20-5

